CAPITOLO 1

Il Processo di Poisson

1.1. Processo contatore

Un processo aleatorio $\{N(t), t \geq 0\}$ viene chiamato un *processo contatore* se $N(t)$ rappresenta il numero totale di eventi che si sono verificati entro l'istante t. Questi sono alcuni esempi di processo contatore:

(1) se consideriamo che $N(t)$ sia il numero di persone che sono entrate in un particolare negozio nell'istante t oppure fino all'istante t partendo da 0, allora $\{N(t), t \geq 0\}$ è un processo contatore nel quale un evento corrisponde all'arrivo di una persona al negozio;
(2) se affermiamo che un evento si verifica quando nasce un bambino allora $\{N(t), t \geq 0\}$ è un processo contatore dove $N(t)$ è il numero totale di persone che sono nate fino all'istante t;
(3) se $N(t)$ è il numero di goal segnati da un giocatore di serie A entro l'istante t del campionato allora $\{N(t), t \geq 0\}$ è un processo contatore. Un evento di questo processo si verificherà ogni volta che il giocatore segna.

Dalla definizione un processo contatore $N(t)$ deve soddisfare le condizioni seguenti

- $N(t) \geq 0$
- $N(t)$ è un valore intero
- se $s<t$ allora $N(s) \leq N(t)$
- per $s<t$, $N(t)$-$N(s)$ è uguale al numero di eventi che si sono verificati nell'intervallo $(s, t]$.

La realizzazione di un processo contatore è una funzione

- monotona non decrescente
- costante a tratti
- con salti di ampiezza unitari in corrispondenza ai tempi di arrivo $t_1, t_2, ...t_n$.

Un processo contatore ha *incrementi indipendenti* se il numero di eventi che si verificano in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti. Questo vuol dire per esempio che il numero di eventi verificatisi entro l'istante *10* (cioè $N(10)$) deve essere indipendente dal numero di eventi trovati tra gli istanti 10 e 15 cioè $N(15) - N(10)$.

Un processo contatore ha *incrementi stazionari* se la distribuzione del numero di eventi trovati in un qualsiasi intervallo di tempo dipende soltanto dalla durata dell'intervallo. In altre parole se il numero di eventi nell'intervallo $(t_1 + s, t_2 + s)$, cioè $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$, ha la stessa distribuzione del numero di eventi trovati nell'intervallo (t_1, t_2), cioè $N(t_2) - N(t_1)$, per ogni $t_1 < t_2$ e $s > 0$.

1.2. Definizione del Processo di Poisson

Uno dei piú importanti *processi contatori* è il processo di Poisson che viene definito come segue.

Definizione 1.2.1. Il processo contatore $\{N(t), t \geq 0\}$ viene chiamato un *processo di Poisson* con intensità $\lambda > 0$ se

- **(i):** $N(0) = 0$.
- **(ii):** Il processo ha *incrementi indipendenti*.
- **(iii):** Il numero di eventi in un qualsiasi intervallo di durata t è una distribuzione di Poisson con media λt per ogni $s, t \geq 0$, cioè

$$\mathrm{P}[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (1.1)$$

$$per\ n = 0, 1, 2, ...$$

Da notare che dalla condizione (iii) segue che un processo di Poisson ha *incrementi stazionari* e anche che $\mathrm{E}[N(t)]=\lambda t$, il che spiega perché λ è chiamato *intensità del processo*

Per poter determinare se un processo arbitrario di conteggio è in realtà un *processo di Poisson* bisogna provare che le condizioni $(i), (ii)$ e (iii) siano soddisfatte. La condizione (i) afferma semplicemente che il conteggio degli eventi comincia nell'istante $t=0$ e la condizione (ii) può essere direttamente verificata dalla conoscenza del processo. Comunque rimane ancora non chiaro come si potrebbe provare che sia soddisfatta la condizione (iii). Per questo motivo è utile dare un'altra definizione equivalente del processo di Poisson.

Definizione 1.2.2. Il processo contatore $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto un processo di Poisson con intensità $\lambda, \lambda > 0$, se[1]

(1) $N(0) = 0$
(2) Il processo ha incrementi indipendenti e stazionari.
(3) $\mathrm{P}[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$
(4) $\mathrm{P}[N(h) \geq 2] = o(h)$

Data questa seconda definizione, dimostriamo ora che essa è equivalente alla prima. Dimostriamo prima che la definizione 1.2.1 implica la definizione 1.2.2. Posto $P_n(t) = \mathrm{P}[N(t) = n]$, deduciamo un'equazione differenziale per $P_0(t)$ in questo modo

$$P_0(t+h) = \mathrm{P}[N(t+h) = 0]$$

$$= \mathrm{P}[N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0]$$

$$= \mathrm{P}[N(t) = 0]\mathrm{P}[N(t+h) - N(t) = 0]$$

[1]La funzione $f(.)$ è detta $o(h)$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

.

$$= P_0(t)\,[1 - \lambda h + o(h)]$$

Le due ultime uguaglianze derivano dalla condizione (2) della definizione 1.2.1 e le condizioni (3)e (4) implicano che

$$\mathrm{P}[N(h) = 0] = 1 - \lambda h + o(h).$$

Quindi

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Per $h \to 0$ abbiamo

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

ovvero

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

che implica per integrazione che $\ln \mathrm{P}_o(t) = -\lambda t + c$ ovvero $P_0\,(t) = Ke^{-\lambda t}$ Poiché $P_0\,(0) = \mathrm{P}[N(0) = 0] = 1$ si trova che

$$P_0\,(t) = e^{-\lambda t} \qquad (1.2)$$

Analogamente per $n > 0$,

$P_n\,(t+h) = P[N(t+h) = n]$

$= \mathrm{P}[N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0] + \mathrm{P}[N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1] + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}[N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k]$

Ma dalla condizione (4) si può dire che l'ultimo termine dell'uguaglianza è $o\,(h)$ e quindi usando la condizione (2) risulta che

$$P_n\,(t+h) = P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o\,(h)$$

$$= (1 - \lambda h)\,P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h)$$

Quindi

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

e facendo tendere h a 0, si ottiene

$$P_n^{'}\,(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

ovvero

$$e^{\lambda t}\left[P_n^{'}(t) + \lambda P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (1.3)$$

Dall'equazione (1.1) si può scrivere

$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda$

ovvero

$P_1\,(t) = (\lambda t + c)e^{-\lambda t}$

il che, visto che $P_1\,(0) = 0$, ci porta a riscrivere

$$P_1\,(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Ora per dimostrare che $P_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$ procediamo per induzione. Il risultato generale vale per $n = 1$. Dall'equazione (1.3),

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_n(t)) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

ovvero

$$e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + c$$

che implica il risultato (poiché $P_n(0) = 0$) provando quindi che la definizione 1.2.2 implica la definizione 1.2.1

Proviamo ora che la definizione 1.2.1 implica la 1.2.2. I primi due punti di entrambe le definizioni ci dicono che $N(0) = 0$ e che il processo ha incrementi indipendenti. Dal punto (*iii*) della definizione 1.2.1 sappiamo che il processo di Poisson ha incrementi stazionari cioè

$$\mathrm{P}[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

e questo per qualsiasi $t, s > 0$ e $n = 0, 1, 2, ...$

Consideriamo un intevallo $h \to 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[N(t+h,t) = 0] &= \mathrm{P}[N(h+t) - N(h) = 0] = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)\\
\mathrm{P}[N(t+h,t) = 1] &= \mathrm{P}[N(h+t) - N(h) = 1] = \lambda h(e^{-\lambda h})\\
&= \lambda h(1-\lambda h-o(h)) = \lambda h+o(h)\\
\mathrm{P}[N(t+h,t) > 1] &= 1 - \{\mathrm{P}[N(t+h,t) = 0] + \mathrm{P}[N(t+h,t) = 1]\}\\
&= 1-(1-\lambda h+o(h)-(\lambda h+o(h))\\
&= o(h)
\end{aligned}$$

il che prova le due ultime condizioni della definizione 2 .

Abbiamo quindi dimostrato che le due definizioni sono equivalenti-

Il processo di Poisson definito finora è detto un *processo di Poisson omogeneo* in quanto l'intensità λ *è costante.* Infatti esiste anche il *processo di Poisson non omogeneo* in cui l'intensità dipende dal tempo cioè $\lambda(s), s > 0$. Il nostro studio si baserà comunque sui processi di Poisson omogenei.

1.3. Descrizione statistica di un processo di Poisson omogeneo

Teorema 1.3.1. Si consideri un processo di Poisson omogeneo di parametro λ. Allora la probabilità di avere un arrivo e uno solo nell'intervallo $(t, t+h)$ è uguale all'infinitesimo $\lambda h + o(h)$ mentre la probabilità di avere arrivi multipli è $o(h)$

$$\mathrm{P}[N(t+h,t) = 1] = \lambda h + o(h) \qquad (1.4)$$

$$\mathrm{P}[N(t+h,t) > 1] = o(h) \qquad (1.5)$$

Da queste due affermazioni si ottiene per la condizione di normalizzazione che

$$\mathrm{P}[N(t+h,t) = 0] = 1 - \lambda h + o(h) \qquad (1.6)$$

da cui

$$\lim_{h\to 0^+} \mathrm{P}[N(t,t+h) = 0] = 1 \qquad (1.7)$$

Teorema 1.3.2. In un processo di Poisson omogeneo il numero di arrivi $N(s,t)$ in un intervallo $(s,t]$ è una variabile di Poisson di media $\lambda(t-s)$

$$P\{N(t)-N(s)=n\} = e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} \qquad (1.8)$$
$$n = 0, 1, 2, ...$$

Prova. Sia

$$\psi(z;s,t) \triangleq \mathrm{E}\left[\exp\{jzN(s,t)\}\right]$$

la funzione caratteristica della variabile aleatoria $N(s,t)$. Posto $h>0$ e sfruttando il fatto che il processo di conteggio ha incrementi indipendenti si ottiene:

$$\psi(z;s,t+h) = \mathrm{E}\left[\exp\{jzN(s,t)+jzN(t,t+h)\}\right] = \psi(z;s,t)\psi(z;t,t+h)$$

da cui

$$\frac{\psi(z;s,t+h)-\psi(z;s,t)}{h} = \psi(z;s,t)\frac{\psi(z;t,t+h)-1}{h} \qquad (1.9)$$

In conseguenza delle (1.4), (1.5) e (1.6) si ottiene:

$$\begin{aligned}\psi(z;t,t+h)-1 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\exp(jzk)P\left[N(t,t+h)=k\right]-1\\ &= 1-\lambda h+o(h)+[\lambda h+o(h)]\exp(jz)+o(h)-1\\ &= \lambda h\left[\exp(jz)-1\right]+o(h)\end{aligned}$$

dato che risulta

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\exp(jzk)\mathrm{P}\left[N(t,t+h)=k\right]\right| &\le \textstyle\sum_{k=2}^{\infty}\mathrm{P}\left[N(t,t+h)=k\right]\\ &= \mathrm{P}\left[N(t,t+h)>1\right]=o(h)\end{aligned}$$

sicché la serie risulta anch'essa infinitesima di ordine superiore ad h. Segue

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(z;t,t+h)-1}{h} = \lambda\left[\exp(jz)-1\right] \qquad (1.10)$$

Allora dalla (1.9) si conclude che $\psi(z;s,t)$ è derivabile rispetto a t e che soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial\psi(z;s,t)}{\partial t} = \lambda\left[\exp(jz)-1\right]\psi(z;s,t)$$

Risolvendo tale equazione differenziale si ottiene:

$$\psi(z;s,t) = K(z;s)e^{\lambda t[\exp(jz)-1]}$$

dove $K(z;s)$ è una costante di integrazione da determinare. A questo scopo si osservi che, per la (1.7), al tendere di t a s la variabile aleatoria $N(s,t)$ converge in distribuzione a 0, sicché in virtú del teorema di Lévy-Cramér la sua funzione caratteristica converge a 1

$$\lim_{t\to s}\psi(z;s,t) = K(z;s)e^{\lambda s\exp(jz)-1} = 1;$$

Da questa, ricavato $K(z;s)$ e sostituendolo nella (1.10), si ottiene

$$\psi(z;s,t) = e^{\lambda(t-s)[\exp(jz)-1]},$$

funzione caratteristica di una *variabile aleatoria di Poisson di media* $\lambda(t-s)$, e la prova è conclusa .

Come conseguenza del teorema, si ha che il numero degli arrivi nell'intervallo $(s, t]$ non dipende dall'istante iniziale s ma soltanto dalla durata dell'intervallo $t-s$. Questa indipendenza è una fondamentale caratteristica di *stazionarietà dei processi di Poisson omogenei.*

La descrizione statistica completa di un processo di Poisson omogeneo è quindi ricavabile dalla sua intensità λ.

I processi di Poisson vengono usati come modello probabilistico atto a descrivere fenomeni aleatori che si concentrano in certi istanti temporali, quali.

- l'emissione di elettroni da parte di un emettitore incandescente in una valvola termoelettronica
- l'arrivo di fotoni provenienti da una sorgente luminosa su un dispositivo fotorivelatore o anche
- l'arrivo di chiamate telefoniche in una centrale di commutazione

Per modellare i fenomeni dei primi due punti enumerati viene usato un particolare tipo di processi di Poisson chiamati *processi di Poisson filtrati* di cui parleremo nel prossimo capitolo.

CAPITOLO 2

Processi di Poisson filtrati

I processi di Poisson filtrati vengono usati per una grande varietà di fenomeni aleatori. Intuitivamente un processo stocastico viene chiamato processo di Poisson filtrato se può essere visto come risultato di operazioni lineari fatte su un processo di Poisson. Processi di questo tipo furono prima introdotti come modello del rumore di granularità (shot noise). Verranno usati più tardi in ricerca operativa come modello per i numeri di server occupati in una coda infinita. A partire da una serie di esempi delle operazioni di ricerca cercheremo di dare una definizione della nozione di processo di Poisson filtrato.

Esempio 2A. *Numero di canali occupati in un sistema telefonico.* Consideriamo una centrale telefonica con un numero infinito di canali disponibili. Ogni chiamata in arrivo dà luogo ad una conversazione su uno dei canali liberi. Assumiamo che gli abbonati chiamino negli istanti $\tau_1, \tau_2, ...$ con $0 < \tau_1 < \tau_2 < ...$ Gli arrivi delle chiamate sono considerati come *eventi di Poisson* di intensità λ. Denotiamo con Y_n il tempo della durata di una conversazione iniziata al tempo τ_n. Si assume inoltre assunto che $Y_1, Y_2, ...$ sono delle variabili aleatorie indipendenti indenticamente distribuite. Ci interessa il numero $X(t)$ di canali in servizio nell'istante t. In altre parole il numero di istanti τ_n per cui $\tau_n < t < \tau_n + Y_n$. Sia

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w_o(t - \tau_n, Y_n), \qquad (2.1)$$

dove $w_0(s, y)$ è una funzione definita per y>0 da

$$w_o(s, y) = 1 \quad se \quad 0 \le s \le y$$

$$= 0 \quad se \quad s < 0 \qquad oppure\ s > y$$

$N(t)$ è il numero di chiamate nell'intervallo $(0, t]$

Esempio 2B. *Numero di server occupati in una coda infinita di server.* Supponiamo che i clienti arrivino in una coda infinita di server negli istanti $\tau_1 < \tau_2 < ....$ Il cliente che arriva nell'istante τ_n richiede un tempo aleatorio di servizio Y_n. Sia $X(t)$ il numero di server occupati nell'istante t. Il processo aleatorio $X(t)$ può essere scritto sotto la forma dell'equazione (2.1)

Definizione. Un processo aleatorio $\{X(t), t \ge 0\}$ viene chiamato un *processo di Poisson filtrato* se, per $t > 0$, può essere rappresentato da

$$X(t) = \sum_{m=1}^{N(t)} w(t, \tau_m, Y_m) \qquad (2.2)$$

dove

(i): $\{N(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson con intensità λ
(ii): $\{Y_n\}$ è una sequenza di variabili aleatori indipendenti identicamente distribuite
(iii): $w(t, \tau, y)$ è una funzione di tre variabili chiamata *funzione di risposta*

Se τ_m rappresenta l'istante in cui si verifica un evento, allora Y_m è l'ampiezza del segnale associato all'evento, $w(t, \tau_m, y)$ rappresenta il valore di un segnale di ampiezza y, avente origine all'istante τ_m e $X(t)$ rappresenta il valore nell'istante t della somma dei segnali dovuti agli eventi verificatisi durante l'intervallo $(0, t]$.

Da notare che per specificare un processo di Poisson filtrato,bisogna conoscere

(i): l'intensità λ del processo di Poisson di base
(ii): la probabilità congiunta delle variabili aleatorie Y_n
(iii): la funzione di risposta.

2.1. Funzioni di risposta

Molto spesso si usano funzioni di risposta del tipo

$$w(t, \tau, y) = w_0(t - \tau, y) \qquad (2.3)$$

L'effetto nell'istante t di un segnale generato in τ dipende soltanto dalla differenza di tempo $(t - \tau)$.

Le funzioni

$$w_o(s, y) = 1 \qquad per\ 0 < s < y$$

$$= 0 \qquad altrimenti$$

e

$$w_o(s, y) = y - s \qquad per\ 0 < s < y$$

$$= 0 \qquad altrimenti$$

portano a processi aleatori che si vedono molto spesso. Funzioni di risposta del tipo

$$w_o(s, y) = y w_1(s)$$

con $w_1(s)$ funzione opportuna, che soddisfa la condizione

$$w_1(s) = 0 \quad per \quad s < 0$$

vengono spesso usate principalmente nei modelli per il rumore granulare (*shot noise*)

Un'altra funzione di risposta importante

$$w(s) = 1 \quad se \quad s \geq 0$$

$$= 0 \quad se \quad s < 0$$

che corrisponde ai processi di Poisson composti.

Teorema 2A. Sia $X(t)$ un processo di Poisson filtrato definito dall'equazione (2.1). Allora per ogni $t > 0$ e ogni u reale,

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{\lambda \int_0^t \mathrm{E}\left[e^{iuw(t,\tau,Y)} - 1\right] d\tau\right\} \qquad (2.4)$$

e per qualsiasi $t_2 > t_1 \geq 0$ e numeri reali u_1 e u_2

$$\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2) = \exp\left\{\lambda \int_0^{t_1} \mathrm{E}\left[e^{i(u_1 w(t_1,\tau,Y)+u_2 w(t_2,\tau,Y))} - 1\right] + \lambda \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{E}\left[e^{iu_2 w(t_2,\tau,Y)} - 1\right] d\tau\right\} \qquad (2.5)$$

Se $\mathrm{E}[w^2(t,\tau,Y)] < \infty$ per tutti τ allora il primo e il secondo momento di $X(t)$ sono dati da

$$\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \lambda \int_0^t \mathrm{E}\left[w(t,\tau,Y)\right] d\tau \qquad (2.6)$$

$$\mathrm{Var}\left[X(t)\right] = \lambda \int_0^t \mathrm{E}\left[w^2(t,\tau,Y)\right] d\tau \qquad (2.7)$$

$$\mathrm{Cov}\left[X(t_1),X(t_2)\right] = \lambda \int_0^{min(t_1,t_2)} \mathrm{E}\left[w(t_1,\tau,Y)w(t_2,\tau,Y)\right] d\tau \quad (2.8)$$

2.2. Processi di Shot Noise e Teorema di Campbell

Un processo aleatorio $X(t), -\infty < t < \infty$ si chiama *processo di shot noise* se può essere rappresentato come una sovrapposizione di impulsi generati in istanti casuali $..., \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, ...$ Assumendo che tutti gli impulsi abbiano lo stesso andamento, si può scrivere

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t-\tau_m) \qquad (2.9)$$

Generalmente le curve dell'impulso sono casualmente scelte da una famiglia di curve $w(s,y)$. Ad ogni istante τ si sceglie il parametro y come valore della variabile aleatoria Y_m. Di conseguenza $X(t)$ è definito come la sovrapposizione

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t-\tau_m, Y_m) \qquad (2.10)$$

I tempi $\{\tau_m\}$ avvengono secondo il processo di Poisson con intensità λ e $\{Y_n\}$ è una sequenza di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite.

I processi aleatori della forma delle equazioni (2.9) e (2.10) hanno un ruolo importante nella teoria del rumore nei dispositivi fisici.

Considerando il processo aleatorio dell'equazione (2.9), dal teorema 2A

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[e^{iuw(t-\tau_m)} - 1\right] d\tau\right\}$$

Facendo un cambio di variabile d'integrazione $s = t - \tau$, si ottiene l'equazione

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\left[e^{iuw(s)} - 1\right] ds\right\} \qquad (2.11)$$

dalla quale si ottengono poi

$$\mathbf{E}\left[X(t)\right] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(s) ds \qquad (2.12)$$

$$\mathrm{Var}\,[X(t)] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w^2(s)ds \qquad (2.13)$$

$$\mathrm{Cov}\,[X(t), X(t+v)] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(s)w(s+v)ds \qquad (2.14)$$

Le equazioni (2.12) e (2.14) sono note come *teorema di Campbell* per la sovrapposizione di impulsi aleatori .

Esempio. Per illustrare l'uso del *Teorema di Campbell* troviamo la media,varianza e covarianza di un processo aleatorio della forma (2.9) con

$$w(s) = \frac{2e}{T^2}s,$$

$$= 0, \ \ \textit{altrimenti}$$

dove e e T sono delle costanti. Questo processo descrive la corrente totale $X(t)$ passante attraverso un tubo catodico nell'istante t, dovuta alla sovrapposizione di impulsi di corrente prodotti dai singoli passaggi degli elettroni dal catodo all'anodo; ogni elettrone ha una carica $-e$ e impiega un tempo T per passare dal catodo all'anodo. Dal teorema di Campbell segue che

$$\mathbf{E}\,[X(t)] = \lambda \int_0^T (\frac{2es}{T^2})ds = \lambda e$$

$$\mathrm{Var}\,[X(t)] = \lambda \int_0^T \left(\frac{2es}{T^2}\right)^2 ds = \frac{4\lambda e^2}{3T}$$

$$\mathrm{Cov}\,[X(t), X(t+v)] = \frac{4\lambda e^2}{3T}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{|\lambda|}{T} + \frac{1}{2}\frac{|\lambda|^2}{T^3}\right) \quad \textit{per} \ \ |\lambda| \leq T$$

$$= 0 \qquad \textit{altrimenti}$$

CAPITOLO 3

Rivelatori di segnali ottici

I fotorivelatori sono dispositivi che producono una corrente elettrica proporzionale all'intensità della radiazione luminosa che incide sull'area attiva dei medesimi. Il funzionamento dei rivelatori di segnali ottici si basa sul meccanismo di assorbimento della radiazione elettromagnetica da parte della materia. Ci sono due principali tipi di fotorivelatori: i *fotodiodi p–i–n* ed i *fotodiodi a valanga.* Ogni fotone incidente su di una superficie di semiconduttore intrinseco viene teoricamente assorbito producendo una coppia elettrone–lacuna nel materiale che, sotto l'azione di un campo elettrico esterno, contribuisce alla corrente di fotoconduzione. I fotoni arrivano sulla superficie del semiconduttore in modo totalmente aleatorio in modo tale che il fenomeno possa essere modellato da un *processo di Poisson*.

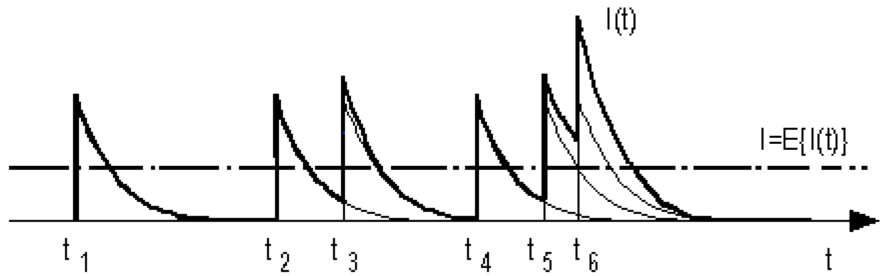
In assenza di radiazione incidente, la corrente nel circuito esterno è praticamente nulla dato il basso valore di conduttività del semiconduttore intrinseco. D'altra parte, in presenza di una radiazione incidente con una potenza ottica utile P, il numero di portatori generati per assorbimento può essere rilevante e la corrente può assumere valori apprezzabili.

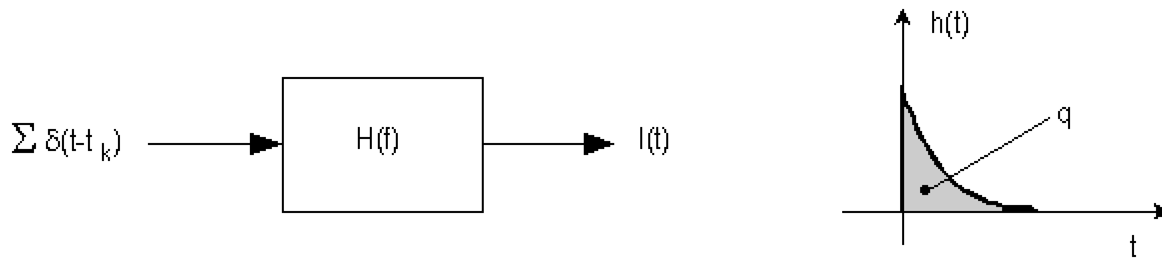
Consideriamo un diodo p–i–n investito da una radiazione luminosa avente vettore di Poynting costante nel tempo P_0 (potenza ottica utile). Ciò equivale a considerare in prima approssimazione la corrente di uscita costante e pari a I = RP_0. Ma in realtà,per effetto dell'aleatorietà del fenomeno di assorbimento, la corrente di uscita sarà composta da una molteplicità di contributi elementari, ognuno dovuto al passaggio di un elettrone nel circuito di uscita, prodotto per assorbimento di un fotone incidente. La corrente di uscita sarà quindi della forma

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - t_k)$$

dove $h(t)$ rappresenta *l'impulso di corrente elementare* provocato da un singolo elettrone con t_k che indica l'istante aleatorio di comparsa del *k-esimo* elettrone nel circuito di uscita. Osservando l'analogia con l'equazione (2.9) del capitolo precedente possiamo dire che $I(t)$ rappresenta dal punto di vista statistico un processo di Poisson omogeneo filtrato.

Nella figura seguente è rappresentato simbolicamente una possibile realizzazione del processo $I(t)$ ed una sua interpretazione. La corrente di fotorivelazione può essere vista come il risultato di un'operazione di filtraggio con un filtro avente risposta impulsiva $h(t)$ di un processo impulsivo di Poisson in cui in corrispondenza dell'assorbimento del k–esimo fotone all'istante t_k si ha la generazione di una funzione





impulsiva

Si può identificare in questo senso, $h(t)$ come una sorta di risposta impulsiva equivalente del fotorivelatore determinata dalle caratteristiche elettriche del dispositivo. Il numero medio (*intensità* λ) di impulsi elementari nell'unità di tempo risulta legato alla potenza ottica incidente sul fotorivelatore.

Dal teorema di Campbell

$$\mathrm{E}\left[I(t)\right] = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = \lambda q$$

e si ottiene quindi

$$\lambda = \mathrm{I}/q = RP_0/q$$

L'intensità λ del processo è costante (processo omogeneo) e in particolare ciò comporta che il numero N di impulsi di corrente originati in un qualunque intervallo temporale di ampiezza T è una variabile aleatoria di Poisson con parametro $\Lambda = \lambda \mathrm{T}$. è possibile allora scrivere la corrente di uscita dal fotorivelatore come

$$I(t) = I + i(t)$$

dove $i(t)$ è un processo di disturbo a valore medio nullo detto *shot noise* o *rumore di granularità*. Dal teorema di Campbell si trova inoltre che $i(t)$ è un processo stazionario in senso lato e ha densità spettrale di potenza

$$S_i(f) = \lambda \left|H(f)\right|^2$$

ove $H(f)$ è la trasformata di Fourier di $h(t)$.

Ai fini del calcolo della potenza di rumore shot in ingresso al ricevitore si può approssimare la relazione precedente con una densità spettrale di potenza costante

$$S_i(f) \cong \lambda \left|H(0)\right|^2 = \lambda q^2 = qRP_0$$

e quindi il disturbo $i(t)$ può considerarsi bianco con tale densità spettrale di potenza. Questa relazione mostra chiaramente come la densità spettrale di potenza del disturbo sia dipendente dal livello del segnale utile: maggiore è P_0, maggiore risulta anche $S_i(f)$.

CAPITOLO 4

Complementi

4.1. Estensione della nozione di Processo di Poisson filtrato

È possibile riformulare la nozione di processo di Poisson filtrato come segue. Sia $\{W(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\}$ un processo aleatorio e sia

$$\varphi_{W(t,\tau)}(u) = E\left[\exp\left\{iuW(t,\tau)\right\}\right] \qquad (4.1)$$

la sua funzione caratteristica. Sia adesso

$$\left\{\left\{W(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\right\}, m = 1, 2, ...\right\}$$

una successione di processi aleatori identicamente distribuiti come $\{W(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\}$. Siano $\tau_1 < \tau_2 < ...$ gli istanti in cui si verificano gli eventi di Poisson con intensità λ e sia $N(t)$ il numero di eventi che si sono verificati nell'intervallo $(0, t]$. Il processo aleatorio $\{X(t), t \geq 0\}$ definito da

$$X(t) = \sum_{m=1}^{N(t)} W_m(t, \tau_m) \qquad (4.2)$$

È chiamato processo di Poisson filtrato (in senso lato) se tutti i processi aleatori $\{N(t), t \geq 0\}$ e $\{W_m(t,\tau), t \geq 0, \tau_m \geq 0\}$,m=1,2,..., sono considerati indipendenti. Si ottengono poi le equazioni

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{-\lambda t + \lambda \int_0^t \varphi_{W(t,\tau)}(u) d\tau\right\} \qquad (4.3)$$

$$\mathbf{E}\left[X(t)\right] = \lambda \int_0^t \mathbf{E}\left[W(t,\tau)\right] d\tau \qquad (4.4)$$

$$\mathbf{Var}\left[X(t)\right] = \lambda \int_0^t \mathbf{E}\left[W^2(t,\tau)\right] d\tau \qquad (4.5)$$