



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Moti ordinati e moti caotici nelle mappe
dell'intervallo in sé, ed applicazioni

RELATORE:

Prof. Giancarlo Benettin

LAUREANDO:

Federico Gasparotto

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione	v
1 Preliminari	1
2 Mappa logistica al variare del parametro	3
2.1 Mappa logistica $r < r_\infty$	3
2.1.1 Descrizione della mappa, punti fissi e loro stabilità	3
2.1.2 Cascata di biforcazioni con raddoppio del periodo	4
2.1.3 Calcolo numerico della costante δ	7
2.2 Mappa logistica $r_\infty < r < 4$	8
2.2.1 Periodo 3 implica caos, Teorema di Sharkovskii	8
2.3 Mappa logistica $r \geq 4$	13
2.3.1 Comparsa dell'insieme di Cantor	13
2.3.2 La dinamica simbolica	14
2.3.3 Mappa unidimensionale caotica	19
2.3.4 Cenni alla teoria Ergodica	21
3 Riscontri sperimentali	25
3.1 Il problema di Benard	25

Introduzione

Nel 1976 il biologo R. May propose di considerare come modello per lo studio dell'evoluzione di una popolazione le iterazioni della mappa $f_r(x) = rx(1-x)$, nota come *mapa logistica*; per $0 \leq r \leq 4$ e dati iniziali scelti in $[0, 1]$ questa è una mappa dell'intervallo in sé. A dispetto della sua apparente semplicità i comportamenti che essa nasconde sono tra i più vari e complessi, e studiandola sono molti gli aspetti matematici profondi che ne emergono; eloquente in questo senso è il titolo che May diede al suo lavoro: "*Simple mathematical models with very complicated dynamics*". Conviene quindi procedere con ordine, esponendo gli argomenti così come sono trattati nell'elaborato.

Negli stessi anni infatti anche M. J. Feigenbaum si stava occupando della mappa logistica, più precisamente di uno dei suoi aspetti peculiari, ossia la successione di biforcazioni con raddoppio del periodo: al crescere del valore del parametro si forma prima un punto fisso, poi quando questo diviene instabile un moto periodico stabile di periodo 2, che a sua volta diviene instabile dando luogo a un moto periodico di periodo 4, e così via, con una successione infinita di biforcazioni dette *sub-armoniche* o con *raddoppio del periodo*. Feigenbaum si accorse che i valori per i quali scattavano le varie biforcazioni seguivano una serie geometrica, precisamente il rapporto tra due intervalli di biforcazioni successivi tendeva al valore $\delta = 4.66920\dots$. Venne avanzata una congettura secondo cui questo tipo di comportamento doveva essere lo stesso per una vasta classe di mappe purché presentassero caratteristiche simili, in particolare analogo ordine del massimo, alla mappa logistica. In effetti, seppur supportate prevalentemente da indagini empiriche, le cose sembravano andare proprio in questa direzione, e il comportamento appena descritto era riscontrabile anche in mappe che qualitativamente assomigliavano a quella in questione, come ad esempio $g_r(x) = r \sin(\pi x)$.

Diversi anni dopo, solo grazie al contributo di O.E. Lanford, J.P. Eckmann e P. Collet, la cosa venne dimostrata in modo rigoroso, facendo uso di alcune idee impiegate in precedenza in Meccanica Statistica nello studio dei fenomeni critici, precisamente del cosiddetto *gruppo di rinormalizzazione*. Si può affermare, di conseguenza, che esiste una analogia profonda, ampiamente sottolineata in seguito in letteratura, tra le tematiche qui esposte e appunto i fenomeni critici: nell'uno e nell'altro caso si incontrano *esponenti critici* (δ ed altri) e ci si confronta con l'universalità (poche caratteristiche qualitative determinano il valore degli esponenti stessi).

Il comportamento appena descritto per la mappa logistica però non interessa tutto l'intervallo $[0, 4]$: i valori di r per cui scattano le varie biforcazioni si accumulano infatti su $r_\infty = 3,5699\dots$. Oltre r_∞ la dinamica è *caotica*. Tra le varie strade

percorribili si è scelto qui di indagare le relazioni che intercorrono tra i vari periodi delle orbite periodiche presenti e i risultati sono senz'altro sorprendenti. Infatti il *Teorema di Sharkovskii* garantisce che se è presente un'orbita periodica di periodo 3 allora sono presenti orbite periodiche di tutti i periodi, la qual cosa è spesso sintetizzata nell'espressione *periodo 3 implica caos*. In realtà c'è molto di più, nel Teorema infatti si stabilisce una sequenza, o meglio, un ordinamento dei naturali: se è presente un'orbita periodica di un certo periodo n allora è assicurata la presenza di orbite periodiche di periodo q , ove q è successivo ad n , e $n = 3$ il primo numero dell'ordinamento.

È affrontato poi lo studio della dinamica per $r > 4$ lasciando il caso dell'uguaglianza alla fine. Con evidenza per tali valori di r la mappa non è più una mappa di $[0, 1]$ in sé, e per molti dei dati iniziali la dinamica è banale: essi vengono prima o dopo inviati in $-\infty$. Tuttavia esiste un insieme di dati iniziali x tali che $f^i(x) \in [0, 1]$ per ogni $i \geq 0$; lo studio di questo insieme risulta molto interessante: anzitutto esso ha la struttura dell'insieme di Cantor. Inoltre per comprendere la dinamica si introducono degli strumenti profondi quali la *coniugazione topologica* e la *dinamica simbolica*: essi permettono di spostare il problema e studiare la dinamica, che diventa quasi banale, in uno spazio, indicato con Σ_2 , i cui elementi sono stringhe date dall'alternanza o dalla ripetizione di due soli elementi 0 e 1. Si possono insomma ottenere in maniera agevole risultati altrimenti difficilmente raggiungibili, con il solo ostacolo di saper scegliere le *giuste coordinate* per affrontare il problema.

Si introduce poi la nozione di *mappa caotica unidimensionale* secondo la definizione di R. Devaney. Stando a questa definizione, non certo l'unica presente in letteratura, sono tre gli ingredienti fondamentali per avere un comportamento caotico:

- la *dipendenza sensibile dai dati iniziali*, che formalizza l'idea secondo cui dati iniziali vicini possono avere comportamento anche drasticamente diverso;
- la *transitività topologica*, che impedisce di decomporre la dinamica in sottoinsiemi invarianti non banali;
- *insieme dei punti periodici denso*, che garantisce, nonostante tutto, la presenza di una certa regolarità.

Grazie alla coniugazione topologica e alla dinamica simbolica si può provare che la mappa logistica per $r > 4$ è caotica nel senso di Devaney per dati iniziali scelti nell'insieme cantoriano descritto in precedenza.

Si introduce poi una nuova applicazione, che genera anch'essa una dinamica caotica, ossia la *mappa a tenda* $T(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, descritta dalla seguente equazione:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Sfruttando ancora una volta la coniugazione topologica, precisamente il fatto che se una mappa è caotica allora anche quella topologicamente coniugata ad essa lo è, si mostra la caoticità di $f_4(x) = 4x(1 - x)$; contrariamente a prima però la dinamica è caotica per dati iniziali scelti in tutto $[0, 1]$ non più solo nell'insieme cantoriano. Si introduce poi qualche elemento della teoria Ergodica per studiare in modo più

approfondito la dinamica ed estrarre utili informazioni.

Nella parte conclusiva si descrive, senza scendere nei dettagli, un sistema fisico, il cosiddetto *problema di Benard*, in cui si arriva ad un comportamento caotico tramite biforcazioni con raddoppio del periodo, analogamente a quanto avviene per la mappa logistica. In questo, come in altri casi, a seguito di indagini sperimentali e numeriche, è stato possibile un calcolo della costante δ , ottenendo un valore che risulta in accordo accettabile con la previsione teorica.

Capitolo 1

Preliminari

Ci si occuperà nel seguito di mappe unidimensionali, eventualmente dipendenti da un parametro, f_r da $I \subset \mathbb{R}$ in sé, che salvo diversa indicazione saranno supposte derivabili quante volte si vuole nel dominio di definizione. Sarà d'interesse, in particolare, la dinamica generata da relazioni ricorsive come la seguente:

$$x_{i+1} = f_r(x_i) \quad x \in I$$

In espressioni come questa risulta intuitivo pensare i come un tempo discreto, in modo che l' i -esima iterata descriva il nostro sistema al tempo i . Sono riportate nel seguito alcune semplici definizioni.

Definizione 1. Un punto \bar{x} si dice *punto fisso* di f se $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Definizione 2. Si definisce *orbita* la collezione di punti $\{x_0, x_1, \dots\}$ ottenuta applicando ripetutamente f ; si intende che $x_i = f^i(x_0)$ ove $f^i := \underbrace{f \circ f \circ \dots}_{i \text{ volte}}$.

Definizione 3. Una orbita periodica di periodo N è un insieme di N punti $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ tali che $f(x_i) = x_{i+1}$ e $f(x_{N-1}) = x_0$, che sono punti fissi di f^N ovvero $f^N(x_i) = x_i$. Per $N = 1$ si parla di *punto fisso*.

È opportuno ricordare inoltre l'espressione per la derivata prima di $f^N(x)$, ottenibile semplicemente applicando la *regola della catena*:

$$(f^N)'(x) = \prod_{k=1}^N (f^k)'(x). \quad (1.1)$$

Vale inoltre la pena ricordare la seguente proposizione (si veda [4]):

Proposizione 1. Sia p un punto fisso di f con $|f'(p)| < 1$, allora p è *stabile-attrattivo*. Se invece $|f'(p)| > 1$, allora p è *instabile-repulsivo*.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che esiste un aperto $A \ni p$ tale che $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(x) = p \forall x \in A$. Essendo f almeno di classe $C^1 \exists \varepsilon > 0$ tale che $|f'(x)| \leq K < 1, \forall x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Ricordando il teorema del valor medio di Lagrange, e che p è punto fisso, risulta $|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq K|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon$; da ciò segue che anche $f(x) \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ e che $f(x)$ è più vicino a p rispetto ad x . Iterando si ha immediatamente che $|f^i(x) - f^i(p)| \leq K^i|x - p|$ e quindi $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(x) = p$, essendo $K < 1$. In maniera analoga si prova l'altra parte dell'enunciato. \square

Questa proposizione si trasporta alle orbite periodiche di periodo N , semplicemente considerando $F := f^N : I \rightarrow I$.

Capitolo 2

Mappa logistica al variare del parametro

2.1 Mappa logistica $r < r_\infty$

2.1.1 Descrizione della mappa, punti fissi e loro stabilità

Ci si concentrerà ora sulla mappa logistica, $f(x) = rx(1 - x)$, precisamente sulla dinamica generata dalle sue iterazioni:

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i). \quad (2.1)$$

La funzione presenta un unico massimo, raggiunto per $x = \frac{1}{2}$, il cui valore è $\frac{r}{4}$. Si farà sempre riferimento a dati iniziali scelti in $[0, 1]$ e, almeno per il momento, si considererà $r \in [0, 4]$. Sotto queste ipotesi si è in presenza di una mappa dell'intervallo in sé e, come anticipato nell'introduzione, la mappa logistica rappresenta un modello semplice ma efficace per descrivere l'evoluzione di una popolazione di individui a intervalli di tempo regolari, ad esempio di anno in anno.

A questo punto risulta spontaneo chiedersi se e come cambia la dinamica al variare del parametro r ; parte del lavoro successivo sarà volto a rispondere proprio a questo interrogativo.

Punto di partenza dell'indagine è la ricerca dei punti fissi, ossia le soluzioni di $x = rx(1 - x)$; un semplice calcolo porge $\tilde{x}_0 = 0 \cup \tilde{x}_r = 1 - \frac{1}{r}$. Lo scenario che si configura è il seguente:

- Per $0 < r \leq 1 \forall x_0 \in [0, 1]$ si ha che $x_i \rightarrow 0$ per $i \rightarrow \infty$;
- Per $1 < r < 3 \forall x_0 \in (0, 1)$ si ha che $x_i \rightarrow \tilde{x}_r$ per $i \rightarrow \infty$.

Da un punto di vista fisico la situazione è facilmente interpretabile, per $0 < r \leq 1$ la popolazione è destinata ad estinguersi, qualunque sia il dato iniziale; per $1 < r < 3$ la popolazione tende a stabilizzarsi attorno al valore \tilde{x}_r .

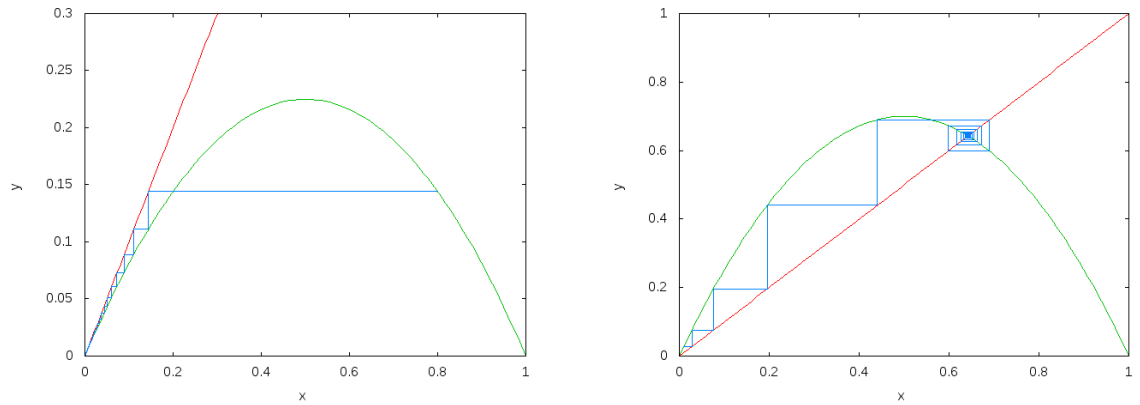


Figura 2.1: In entrambe le figure la retta è la bisettrice del quadrante. Si osservi la convergenza a 0 nella figura a sinistra ($r = 0.9$), in un dettaglio del quadrato di lato unitario; viceversa in quella di destra c'è convergenza al punto fisso \tilde{x}_r ($r = 2.8$).

2.1.2 Cascata di biforcazioni con raddoppio del periodo

Per $r = 3$ avviene un fatto d'importanza centrale: il punto \tilde{x}_r perde la sua stabilità, si ha infatti $|f'(\tilde{x}_r)| = 1$ per $r = 3$ mentre $|f'(\tilde{x}_r)| = |2 - r| > 1$ per $r > 3$, e a questo punto basta ricordare la *Proposizione 1*. Quindi per $r > 3$, scelto un generico dato iniziale $x_0 \neq \tilde{x}_r$, x_n non tenderà più a \tilde{x}_r . Risulta ora convincente analizzare la situazione da un punto di vista grafico: non appena r supera il valore 3 la bisettrice interseca f^2 non solo in 0 e \tilde{x}_r ma anche in altri due punti, siano essi \tilde{x}_α e \tilde{x}_β .

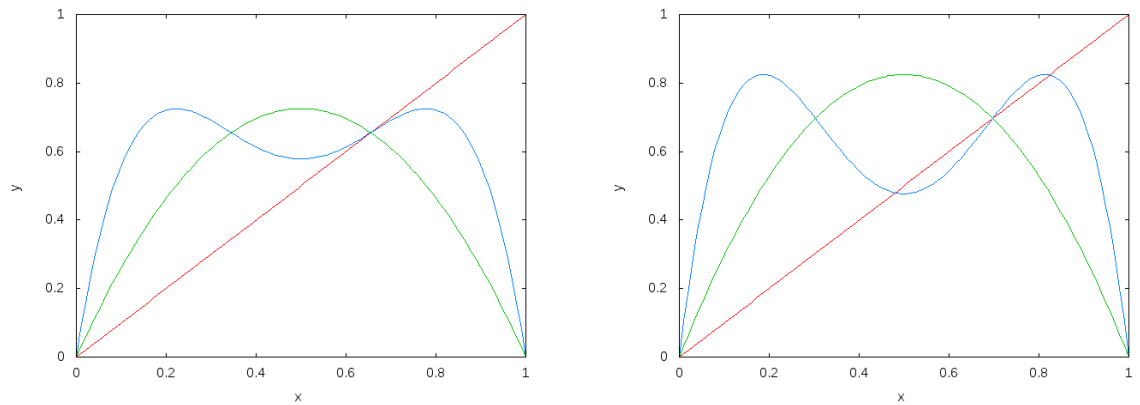


Figura 2.2: Comparsa di nuove intersezioni una volta che r supera il valore 3.

I punti \tilde{x}_α e \tilde{x}_β sono ovviamente punti periodici di periodo 2 e si vuole cercare di capire per quali valori di r questi siano stabili, si tratta cioè di determinare gli r tali per cui $|[(f^2)'(\tilde{x}_{\alpha,\beta})]| < 1$. Anche qui non è che un semplice calcolo: si ottiene $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. Per tali valori di r da un certo n in poi il dato iniziale x_0 comincerà ad oscillare tra \tilde{x}_α e \tilde{x}_β , si ha insomma un *2-ciclo stabile*.

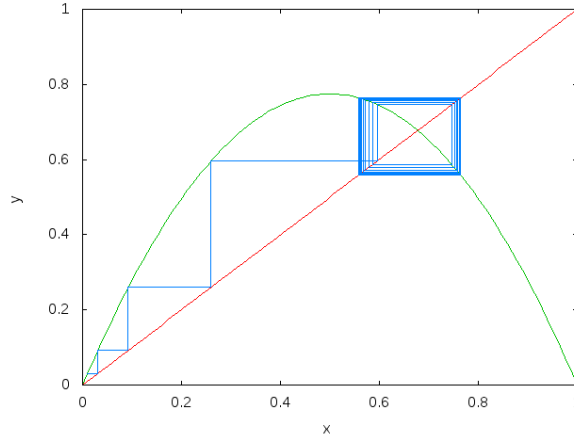


Figura 2.3: Per $r = 3.1$ il dato iniziale $x_0 = 0.01$ asintoticamente oscilla tra due valori.

Si verifica, ma la cosa non è ovvia, che il ragionamento appena esposto può essere applicato al *2-ciclo*, al *4-ciclo* e così via e pertanto può essere generalizzato nel modo seguente: oltrepassato un certo valore di r , lo si indichi con r_{n+1} , il 2^n -ciclo perde la sua stabilità, con la conseguente comparsa di un 2^{n+1} -ciclo stabile. Si parla a tal proposito di *biforcazione con raddoppio del periodo* e si è soliti indicare questo susseguirsi di biforcazioni con l'espressione *cascata di biforcazioni*. Risulta quindi particolarmente significativo il seguente grafico che mostra il comportamento asintotico al variare del parametro r .

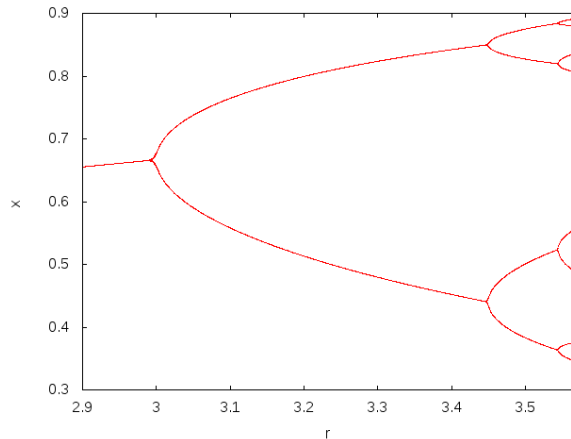


Figura 2.4: Grafico delle biforcazioni: sono chiaramente visibili il 2-ciclo, il 4-ciclo, il ciclo di ordine 8 e, anche se meno chiaramente quello di ordine 16.

Ci si potrebbe aspettare che il comportamento sopra descritto, con la prima biforcazione che scatta ad $r = 3$, prosegua fino ad $r = 4$. Tuttavia una semplice indagine numerica mostra che le cose non sono così semplici. L'idea è quella di scegliere come dato iniziale sempre $x_0 = \frac{1}{2}$ e, aspettato un certo transiente iniziale, andare a vedere il comportamento asintotico, ossia i valori assunti da x_n da un certo n in poi, ripetendo il tutto per valori di r via via crescenti.

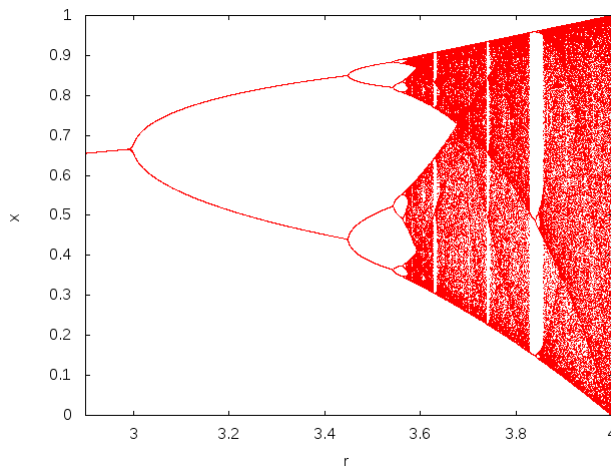


Figura 2.5: Comportamento asintotico del dato iniziale $x_0 = \frac{1}{2}$ al crescere di r .

Un semplice sguardo al grafico riportato sopra evidenzia che i valori di r per i quali interviene una nuova biforcazione, ossia per i quali compare un 2^{n+1} -ciclo stabile, si accumulano ad un valore denotato con r_∞ , prossimo a 3,6¹. Oltre r_∞ i comportamenti sono i più vari e la dinamica è, anche se l'espressione deve essere meglio giustificata, *caotica* e lo studio è rimandato al seguito. Ci si limita per ora ad un breve commento della figura per descrivere ciò che accade oltre r_∞ ; si nota come per molti valori di r maggiori di r_∞ l'orbita, asintoticamente, *riempie* o meglio *visita* non un insieme discreto di punti bensì un insieme di misura positiva. Compaiono inoltre delle *finestre periodiche*, ossia degli intervalli di valori di r in corrispondenza dei quali si formano dei cicli stabili, di periodo 3, 5, 7, ... e da qui riappaiono nuove biforcazioni.

Feigenbaum per primo si accorse che i valori di r per i quali scattano le varie biforcazioni seguono una legge geometrica precisamente il rapporto tra due intervalli di biforcazione successivi tende ad una costante $\delta = 4,6692\dots$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta. \quad (2.2)$$

La cosa veramente sorprendente è che la costante δ , qui definita, è la medesima per una vasta classe di mappe, precisamente per quelle che soddisfano le seguenti condizioni:

¹Precisamente si può calcolare $r_\infty = 3,5669\dots$. Tuttavia non è questo il valore interessante, in quanto dipende dalla mappa che si sta considerando; cambiando mappa cambia anche il valore di r_∞ .

- $f(0, r) = f(1, r) = 0 \quad \forall r$;
- $f(\cdot, r) : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \forall r$;
- $f(x, r)$ ha un solo massimo quadratico \bar{x} in $[0, 1]$ ($f''(\bar{x}, r) < 0 \quad \forall r$);
- Derivata Schwarziana negativa: $Sf(x, r) = \frac{f'''(x, r)}{f'(x, r)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x, r)}{f'(x, r)} \right)^2 < 0$.

Si sottolinea che il valore assunto dalla costante δ dipende solamente dalle proprietà qualitative di f , come il comportamento all'intorno del massimo, e non dai dettagli: lavorare quindi con la mappa logistica è certamente comodo, essa è un polinomio, ma non indispensabile per arrivare agli stessi risultati.

2.1.3 Calcolo numerico della costante δ

Sono qui presentati i risultati ottenuti tramite un programma in C++ grazie al quale si è calcolata la costante δ definita dalla (2.2); si è lavorato inizialmente con la mappa logistica e in un secondo momento con $g_r(x) = r \sin(\pi x)$. Trattandosi di un problema computazionale il limite per $n \rightarrow \infty$ va inteso come *calcolo di un numero ragionevole di stime della costante δ , mostrando che queste convergono ad un dato valore*. È opportuno descrivere brevemente la procedura adottata, che segue quanto suggerito in [2]: anziché ricercare i valori del parametro per cui scatta una biforcazione è più conveniente², ed equivalente in termini di risultato finale, calcolare i valori del parametro, indicati con \tilde{r}_n per cui si ha un 2^n -ciclo *superstabile* ossia per quali valori del parametro il punto $\bar{x} = \frac{1}{2}$ appartiene al 2^n -ciclo, $n = 0, 1, 2, \dots$. L'equazione da risolvere, in \tilde{r}_n , è:

$$f_{\tilde{r}_n}^{2^n} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

In altre parole bisogna trovare gli zeri di $g(\tilde{r}_n) := f_{\tilde{r}_n}^{2^n} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}$ per $n = 0, 1, 2, \dots$, e lo si può fare tramite il metodo di Newton. Le varie stime di δ_n si ottengono da $\delta_n = \frac{\tilde{r}_n - \tilde{r}_{n-1}}{\tilde{r}_{n+1} - \tilde{r}_n}$.

Quanto detto si applica anche a g_r .

²Ricercare con precisione il valore per cui scatta una biforcazione può essere molto delicato, specie nei pressi di r_∞

$f_r(x) = rx(1-x)$		
n -ciclo	\tilde{r}_n	δ_n
1	2.0000000000	
2	3.2360679775	
4	3.4985616993	4.7089430135
8	3.5546408628	4.6807709980
16	3.5666673799	4.6629596111
32	3.5692435316	4.6684039259
64	3.5697952937	4.6689537410
128	3.5699134654	4.6691571813
256	3.5699387742	4.6691910025
512	3.5699441946	4.6691994706
1024	3.5699453555	4.6692011346
2048	3.5699456041	4.6692015095
4096	3.5699456574	4.6692015885
8192	3.5699456688	4.6692016035

$g_r(x) = r\pi \sin(x)$		
n -ciclo	\tilde{r}_n	δ_n
1	0.5000000000	
2	0.77773376617	
4	0.84638217171	4.0457424174
8	0.86145035088	4.5558527500
16	0.86469418075	4.6451817177
32	0.86538967341	4.6640749123
64	0.86553866160	4.6681056719
128	0.86557057192	4.6689667083
256	0.86557740621	4.6691513336
512	0.86557886990	4.6691908376
1024	0.86557918338	4.6691993027
2048	0.86557925052	4.6692011152
4096	0.86557926490	4.6692015029
8192	0.86557926798	4.6692015875

2.2 Mappa logistica $r_\infty < r < 4$

2.2.1 Periodo 3 implica caos, Teorema di Sharkovskii

Come anticipato i comportamenti che si manifestano per $r > r_\infty$ sono tra i più vari e la fenomenologia che si presenta è molto ricca, basta dare un rapido sguardo alla figura (2.6) per convincersene. Una questione interessante, analizzata qui in dettaglio, può essere cercare di capire quali siano i periodi delle varie orbite periodiche presenti, che relazioni intercorrano tra essi, e in che modo i vari periodi compaiono al crescere del parametro; la risposta a questi semplici, almeno nella formulazione, interrogativi sono sorprendenti. Conviene però procedere con ordine.

Un primo importante fatto è che se per un determinato valore di r , considerata la corrispondente f_r , è presente un'orbita periodica di periodo 3 allora *sono ammesse*

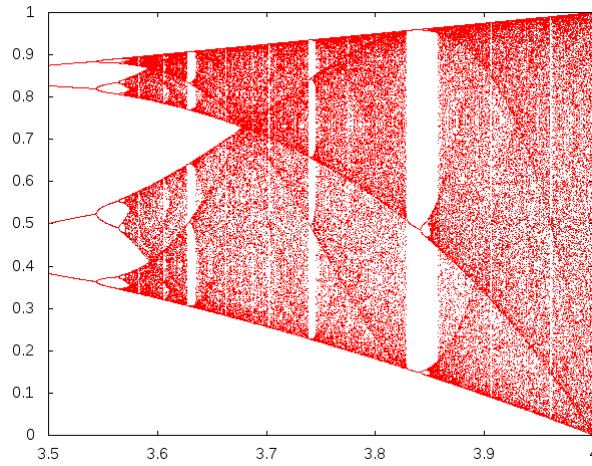


Figura 2.6: Comportamento asintotico, ingrandimento oltre r_∞ .

orbite periodiche di periodo n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Ma c'è di più: infatti non solo i risultati a cui si fa riferimento valgono in tutta generalità qualunque sia la mappa che si sta considerando, purché sia continua, ma si è anche in grado di stabilire un *ordinamento dei naturali*, in cui la relazione d'ordine è indicata con \triangleright , e se $n \triangleright k$ allora, se è presente un'orbita periodica di periodo n , è presente anche un'orbita periodica di periodo k . L'ordinamento è il seguente:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1, \quad (2.3)$$

precisamente si stanno considerando inizialmente tutti i numeri dispari 1 escluso, poi questi stessi moltiplicati per 2, 2^2 , 2^3 , ..., e alla fine sono elencate le potenze di 2 in ordine decrescente. Ogni naturale si può scrivere come $s \cdot 2^k$ con s dispari, dunque tutti i naturali sono elencati nelle (2.3). Come detto quindi l'esistenza di una orbita periodica di periodo 3, il primo numero della sequenza (2.3), implica l'esistenza di un'orbita di periodo qualsiasi: si fa spesso riferimento a questo fatto con l'espressione *periodo 3 implica caos*.

Quanto affermato in precedenza in merito al periodo delle orbite periodiche è assicurato dal *Teorema di Sharkovskii*:

Teorema 1. (*Sharkovskii*) *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si assuma che f abbia un punto di periodo n con $n \triangleright k$. Allora f ammette un punto periodico di periodo k .*

La dimostrazione è laboriosa, sono presentati qui alcuni dei tratti principali, per i dettagli si veda [3] ed eventualmente [7].

Lemma 1. *Siano I e J due intervalli chiusi e $f(I) \supset J$, allora esiste un intervallo $K \subset I$ tale che $f(K) = J$, $f(\text{int}(K)) = \text{int}(J)$ e $f(\partial K) = \partial J$.*

Dimostrazione. Sia $J = [a, b]$, e $c := \max f^{-1}(a)$ si prenda allora $K = [c, d]$ con $d := \min((c, +\infty) \cap f^{-1}(b))$. Se la precedente espressione non è definita si consideri $K = [c', d']$ con $c' := \max((-\infty, c) \cap f^{-1}(b))$ e $d' := \min((c', +\infty) \cap f^{-1}(a))$. \square

Definizione 4. Un intervallo I copre un intervallo J tramite f se $f(I) \supset J$; la cosa sarà indicata con $I \rightarrow J$.

Lemma 2. (i) Si assuma che esistano due punti a, b $a \neq b$, tali che $f(a) > a$ e $f(b) < b$ e $[a, b]$ è contenuto nel dominio di f , allora c'è un punto fisso tra a e b .

(ii) Se $I \rightarrow I$, allora f ha un punto fisso in I .

Dimostrazione. Per (i) sia $g(x) = f(x) - x$, quindi $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, ma per la continuità di g esiste un punto c tale che $g(c) = 0$, ovvero $f(c) = c$.

Quanto alla (ii): per il lemma precedente esiste $K = [x_1, x_2] \subset I$ con $f(K) = I = [a, b]$. Allora o $f(x_1) = a \leq x_1$ e $f(x_2) = b \geq x_2$ oppure $f(x_1) = b > x_1$ e $f(x_2) = a < x_2$. Se vale una delle uguaglianze si conclude, altrimenti si applica il risultato ottenuto al punto precedente. \square

Lemma 3. Consideriamo il seguente loop: $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow \dots \rightarrow J_n = J_0$ con $f(J_k) \supset J_{k+1}$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$.

(i) Esiste un punto fisso x_0 di f^n tale che $f^k(x_0) \in J_k$ per $k = 0, 1, \dots, n$.

(ii) Si assuma inoltre che il loop non sia costituito dalla ripetizione ciclica di loop più piccoli e che valga $\text{int}(J_k) \cap \text{int}(J_j) = \emptyset$ per $k \neq j$. Se x_0 , definito al punto precedente, appartiene a $\text{int}(J_0)$ allora ha periodo n .

Dimostrazione. È presentato inizialmente un ragionamento induttivo. L'affermazione che si vuole provare, al generico passo j è che esiste un intervallo $K_j \subset J_0$ tale che per ogni $i = 1, 2, \dots, j$ $f^i(K_j) \subset J_i$, $f^i(\text{int}(K_j)) \subset \text{int}(J_i)$, e $f^j(K_j) = J_j$. Per il lemma (1) l'ipotesi induttiva è vera per $j = 1$. Si assuma vero l'enunciato induttivo allo stadio $k-1$, allora:

$$f^k(K_{k-1}) = f(f^{k-1}(K_{k-1})) = f(J_{k-1}) \supset J_k.$$

A questo punto ancora per il lemma (1) esiste $K_k \subset K_{k-1}$ tale che $f^k(K_k) = J_k$ con $f^k(\text{int}K_k) = \text{int}(J_k)$ e, essendo vera l'ipotesi induttiva per $k-1$ allora anche le altre affermazioni su $K_k \subset K_{k-1}$ sono vere e la prova del ragionamento induttivo è completata.

Si ha allora che $f^n(K_n) = J_0$ e per il lemma (2) f^n ha un punto fisso $x_0 \in K_n$ e $f^i(x_0) \in J_i$ $i = 1, 2, \dots, n$. e la parte (i) è conclusa.

Venendo alla (ii) dal momento che $f^n(\text{int}(K_n)) = \text{int}(J_0)$ se x_0 , definito come al punto precedente, appartiene ad $\text{int}(J_0)$ allora $x_0 \in \text{int}(K_n)$ e $f^i(x_0) \in \text{int}(J_i)$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Visto che il loop non è una ripetizione di uno più corto x_0 ha proprio periodo n . \square

Si introduce inoltre la seguente utile:

Definizione 5. Dato un intervallo J chiuso, considerata una sua partizione $\{J_1, \dots, J_s\}$ con J_i chiuso $\forall i$ e $\text{int}(J_k) \cap \text{int}(J_j) = \emptyset$ per $k \neq j$, si dice *grafo associato alla partizione* il grafo in cui i vertici sono costituiti dai vari I_i e J_k è collegato a J_j se $J_k \rightarrow J_j$.

Per un esempio si veda la figura (2.7). Si può ora procedere.

Dimostrazione. Si consideri un intero positivo n dispari, e si assuma che f abbia un punto x periodico di periodo n e f non abbia punti periodici di periodo dispari k , con $k < n$. Sia nel seguito $\Omega(x)$ l'insieme costituito dai punti dell'orbita di x e $J = [\min \Omega(x), \max \Omega(x)]$. Più esplicitamente sia $\Omega(x) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ con $z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_n$ ³. Verrà considerata la partizione di J data da intervalli del tipo $[z_j, z_{j+1}]$ e verrà indicato con I_j un intervallo del tipo $[z_j, z_{j+1}]$ ⁴ per qualche j . Ovviamente si avrà $f(z_n) < z_n$ e $f(z_1) > z_1$; sia $a = \max\{z \in \Omega(x) : f(z) > z\}$ e $b = \min\{z \in \Omega(x) : z > a\}$, si indichi con I_1 l'intervallo $[a, b]$. Chiaramente, per costruzione, $f(a) > a$ ossia $f(a) \geq b$ e $f(b) < b$ ovvero $f(b) \leq a$, e quindi $I_1 \rightarrow I_1$. Si vuole ora mostrare che esiste un intervallo $K_0 = [z_j, z_{j+1}] \neq [a, b] = I_1$ tale che $f(K_0) \supset I_1$. Essendo n dispari ci saranno più punti di $\Omega(x)$ da una parte di $\text{int}(I_1)$ che dall'altra. Sia Φ l'insieme degli elementi di $\Omega(x)$ che stanno dalla parte di $\text{int}(I_1)$ con più elementi. Necessariamente ci sarà almeno un elemento di Φ mandato da f in $\Omega(x) \setminus \Phi$ e almeno un elemento di Φ mandato da f in Φ stesso, e pertanto esiste una coppia di elementi consecutivi di Ω , che identifichiamo con $\{z_j, z_{j+1}\}$ tale che $f([z_j, z_{j+1}]) \supset I_1$. Si consideri ora il seguente loop: $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$, che, si veda [3], esiste sempre. Si vuole ora mostrare che il più corto loop possibile deve avere $k = n - 1$, mostrando che per $2 \leq k < n - 1$ si ottiene un assurdo.

Uno tra k e $k + 1$ deve essere dispari, sia $m = k$ o $k + 1$ questo intero dispari, vale certamente $1 < m < n$. Si faccia allora riferimento a $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ o $I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ a seconda del caso. Per l'ultimo dei lemmi precedenti esiste un punto y tale che $f^m(y) = y$: tale punto però non può essere un degli estremi di I_1 , altrimenti avrebbe periodo $n > m$, nè essere interno ad I_1 altrimenti si avrebbe un punto periodico di periodo dispari $m < n$ contrariamente a quanto assunto in precedenza. Deve perciò essere $k = n - 1$. Si avrà inoltre $f(I_j) \supset I_1$ con $j = 1, n - 1$, per costruzione, mentre si può affermare che non può essere $I_i \rightarrow I_j$ con $j > i + 1$, altrimenti il loop non sarebbe il più corto possibile, e in particolare I_1 ricopre tramite f solamente sé stesso e I_2 .

A questo punto si può stabilire l'ordine dei vari I_j e dei vari punti dell'orbita $\Omega(x)$: si deve avere $I_{n-1} \leq I_{n-3} \leq \dots \leq I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq \dots \leq I_{n-2}$ ossia $f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \dots < f^2(a) < a < f(a) < \dots < f^3(a) < \dots < f^{n-2}(a)$, o i precedenti invertiti. Infatti poiché $I_1 = [a, b]$ copre tramite f solamente I_1 stesso ed I_2 questi devono essere adiacenti, ad esempio $I_2 \leq I_1$ e di conseguenza $f(a) = b$ e $f(b)$ deve essere l'estremo sinistro di I_2 . Ora $f(\partial I_2) = \partial I_3$ e uno degli estremi è proprio $f(a) = b$ ricordando ancora una volta che I_2 non può ricoprire tramite f un altro I_j con $j > 3$ né può ricoprire I_1 , I_3 deve essere adiacente ad I_1 . Proseguendo in questo modo si ricostruisce la sequenza voluta.

Risulta $I_{n-1} = [f^{n-1}(a), f^{n-3}(a)]$, quindi $f(I_{n-1}) \ni \{a, f^{n-2}(a)\}$ e quindi $f(I_{n-1}) \supset [a, f^{n-2}(a)]$ quindi I_{n-1} ricopre tramite f tutti gli I_j con j dispari.

Quanto detto può essere riassunto dal grafo associato alla partizione di J data dai vari I_i .

³Si stanno insomma considerando i punti dell'orbita secondo l'ordinamento dei reali. Si farà riferimento a tali punti con la notazione x_1, x_2, \dots quando si vorrà sottolineare che x_j è mappato da f in x_{j+1} .

⁴La numerazione degli intervalli è indipendente e slegata dalla numerazione degli estremi, nel

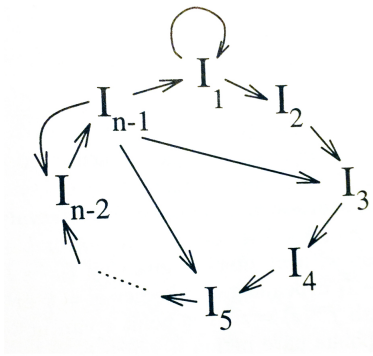


Figura 2.7: Grafo associato alla partizione di J data dai vari I_i .

Si consideri ora k con $n \triangleright k$ in 2.3. Quindi o (i) $k < n$ con k pari oppure (ii) $k > n$ con k pari o dispari:

- (i) Basta considerare il *loop* dato da $I_{n-1} \rightarrow I_{n-k} \rightarrow I_{n-k+1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1}$ e per l'ultimo dei lemmi precedenti esiste un $x_0 \in I_{n-1}$ periodico di periodo k ;
- (ii) In questo caso invece si arriva alla stessa conclusione, ricorrendo allo stesso lemma, applicato a $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \dots \rightarrow I_1$.

Si dimostra ora che se f ha un punto periodico di periodo n pari allora f ha un punto periodico di periodo 2, questo risultato sar  fondamentale nel seguito. Infatti, ricordando le notazioni precedenti, se   ancora vero che alcuni punti di Φ vengono mandati in $\Omega(x) \setminus \Phi$ ed altri no, allora si pu  sfruttare quanto gi  dimostrato e considerare un loop del tipo $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$, si veda [3], da cui si ricava l'esistenza di un punto periodico di periodo 2. Se non   cos  allora gli $z_i \leq a$ soddisfano $f(z_i) \geq b$, perch  se cos  non fosse si ricadrebbe nel caso precedente, mentre per gli $z_j \geq b$ risulta $f(z_j) \leq a$. Sicuramente esistono due elementi \tilde{z} e \bar{z} con $\tilde{z}, \bar{z} \leq a$ tali che $f\{\tilde{z}, \bar{z}\} = \{b, z_n\}$ e due elementi \hat{z} e \underline{z} con $\hat{z}, \underline{z} \geq b$ tali che $f\{\hat{z}, \underline{z}\} = \{z_1, a\}$. Dalla continuit  di f segue che $f[z_1, a] \supset [b, z_n]$ e $f[b, z_n] \supset [z_1, a]$ allora $[z_1, a] \rightarrow [b, z_n] \rightarrow [z_1, a]$ e si conclude.

Si dimostra ora che se f ha periodo $n = 2^m$ allora ha periodo $k = 2^p$, $p < m$. Sia $g = f^{k/2} = f^{2^{p-1}}$, essa ha periodo 2^{m-p+1} e quindi per il punto precedente ha anche periodo 2 e esiste x_0 tale che $x_0 = g^2(x_0) = f^k(x_0)$ come si voleva.

Rimane da provare che se $n = 2^m p$, con $p > 1$, dispari, e:

- $k = 2^s q$, con $s \geq m + 1$ e $q \geq 1$ e q dispari
- $k = 2^s$ con $s \leq m$
- $k = 2^m q$ con q dispari e $q > p$

allora $n \triangleright k$, ma questi casi possono essere ricondotti ai precedenti. □

seguito le cose saranno pi  chiare.

Per chiudere questa sezione si può ricordare un altro interessante risultato che risponde ad uno degli interrogativi posti in precedenza. Grazie ai lavori di Daudy e Hubbard infatti è stato dimostrato che al crescere del parametro r se compaiono nuovi periodi, quelli già presenti non scompaiono. Quindi dal valore r_3 , a cui compare un 3 – ciclo che per di più è anche stabile, in poi, è garantita la presenza di punti periodici di ogni periodo⁵.

2.3 Mappa logistica $r \geq 4$

2.3.1 Comparsa dell'insieme di Cantor

Nel caso in cui $r \geq 4$ ci sono altri comportamenti interessanti. Ci si concentrerà in un primo momento sul caso $r > 4$ rimandando il caso $r = 4$ e le sue particolarità ad un secondo momento.

La prima cosa ovvia è che esiste un intervallo, sia esso A_0 , i cui punti vengono inviati da f fuori da $[0, 1]$: precisamente risulta $A_0 = (\frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{r}}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{r}}}{2})$. Si indicherà con I_0 l'intervallo $[0, \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{r}}}{2}]$ e con I_1 l'intervallo $[\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{r}}}{2}, 1]$.

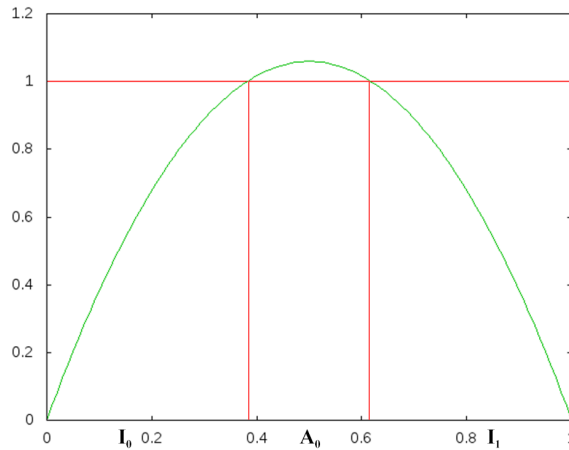


Figura 2.8: Mappa logistica con $r > 4$.

È altrettanto evidente che alcuni punti verranno mandati da f in A_1 e quindi saranno esterni a $[0, 1]$ dopo due iterazioni: più in dettaglio essendo $f(I_0) = f(I_1) = [0, 1]$ esisterà un aperto contenuto in I_0 la cui immagine è l'aperto A_0 e, allo stesso modo, ne esisterà uno contenuto in I_1 la cui immagine è sempre A_0 ; si denoterà l'unione disgiunta di questi aperti con A_1 . Si indicherà insomma con $A_n := \{x : f^i(x) \in [0, 1] \text{ per } i = 0, 1, \dots, n \text{ e } f^{n+1}(x) \notin [0, 1]\}$, con ragionamenti non differenti dai precedenti ci si convince che i vari A_n sono aperti.

Equivalentemente si può anche affermare che l'insieme dei punti che non vengono

⁵Si faccia attenzione al fatto che quelli riportati in figura sono i cicli *stabili-attrattivi*, e le orbite periodiche di periodo diverso da quello del ciclo stabile sono in un certo senso nascoste. Infatti non tutti i dati iniziali sono attratti dal ciclo stabile, ed è proprio tra questi dati iniziali che si formano orbite periodiche con periodo diverso da quello osservato nella figura

mandati fuori da $[0, 1]$ alla n -esima iterazione, lo si indichi con K_n , è costituito da 2^n chiusi; si noti, in particolare, che gli estremi di questi intervalli vengono mandati in 1 alla $n+1$ -esima iterazione e quindi in 0 dopo $n+2$ iterazioni. Sicuramente esiste un insieme, lo si indichi con Λ , non vuoto e contenuto in $[0, 1]$ tale che se $x_0 \in \Lambda$ allora $f^i(x_0) \in \Lambda \quad \forall i \geq 0$ infatti 0, 1, gli estremi degli intervalli che compongono i vari K_n , e il punto fisso vi appartengono. Sia insomma:

$$\Lambda = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n. \quad (2.4)$$

Risulta interessante capire quali siano le proprietà di questo insieme (si veda [3]):

Proposizione 2. *L'insieme definito dalla 2.4 ha struttura dell'insieme di Cantor, ossia è:*

- (i) chiuso;
- (ii) perfetto, cioè non ha punti isolati;
- (iii) totalmente disconnesso, cioè non contiene alcun intervallo.

Dimostrazione. La (i) segue dal fatto che l'unione di aperti è un aperto, e il complementare di un aperto rispetto ad un chiuso è un chiuso. Per quel che riguarda la (ii) invece si assuma che la misura dei vari componenti di K_n vada a zero quando $n \rightarrow \infty$. Si consideri allora un punto $\bar{x} \in \Lambda$ e una palla aperta di centro \bar{x} e raggio ϵ . Per l'assunzione fatta in precedenza esiste un n tale che un chiuso I_n tra quelli che formano K_n sia sufficientemente piccolo da essere contenuto in $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$. A questo punto o \bar{x} è uno degli estremi di I_n e allora l'altro estremo di I_n appartiene a Λ (si ricordi che gli estremi dei vari chiusi devono necessariamente appartenere a Λ) oppure $\bar{x} \in \text{int}(I_n)$ e come prima gli estremi di I_n devono appartenere a Λ : in entrambi i casi \bar{x} è non isolato. Se invece la misura dei vari K_n non andasse a zero allora $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ conterrebbe un intervallo, e pertanto sarebbe ancora perfetto. La (iii) è invece il punto più impegnativo. Ci si limita qui al caso $r > 2 + \sqrt{5}$, per $4 < r \leq 2 + \sqrt{5}$ si veda eventualmente [3] Con questa scelta si ha, con un semplice conto, $|f'| \geq \lambda > 1$ in $[0, 1] \setminus A_0$, perciò $|f'| \geq \lambda > 1$ in Λ . Ricordando però l'espressione della derivata prima di f^n , si riveda la (1.1), si ha che $|(f^n)'| \geq \lambda^n$ in Λ . Ora si procede per assurdo: si supponga che esista un $[x, y] \subset \Lambda$, allora esiste un $a \in (x, y)$ tale che $|f^n(x) - f^n(y)| = |(f^n(a))'| |x - y| \geq \lambda^n |x - y|$ a questo punto basta scegliere n tale che $\lambda^n |x - y| > 1$ e si ha l'assurdo. \square

2.3.2 La dinamica simbolica

Come anticipato la dinamica interessante è quella che si ha con dati iniziali in Λ , per studiarla è necessario introdurre uno strumento importante e profondo: la *dinamica simbolica*.

È opportuno cominciare con un paio di semplici definizioni:

Definizione 6. *L'insieme Σ_2 è l'insieme i cui elementi sono stringhe date dal ripetersi o dall'alternarsi di 0 o 1, ossia: $s \in \Sigma_2 \iff \{s = (s_0, s_1, \dots) : s_j = 0 \text{ o } 1\}$.*

Si può poi definire una distanza in Σ_2 , come segue:

Definizione 7. Dati $s, t \in \Sigma_2$ la loro *distanza*, $d(s, t)$, è data da:

$$d(s, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}. \quad (2.5)$$

È facile convincersi che questa è una buona definizione, ovvero soddisfa le varie proprietà di una distanza. Si noti in particolare che se due elementi s, t sono tali che $s_j = t_j \forall j = 0, 1, \dots, N$ allora $d(s, t) \leq 2^{-N}$. Si introduce invece ora una nozione basilare per la dinamica simbolica, ossia una applicazione da Σ_2 in sé, la cui iterate sono definite in modo ovvio:

Definizione 8. L'applicazione $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dato da

$$\sigma(s) = \sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, \dots), \quad (2.6)$$

si dice operatore di *traslazione* o di *shift*.

Senza difficoltà si dimostra che $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ è un'applicazione continua, si veda [1]. Vale la pena studiare un po' più in dettaglio altre tra le proprietà matematiche che σ possiede. Quello che segue, come si vedrà, può essere ricavata in maniera agevole ma sarà d'importanza capitale nel seguito. Ancora una volta è doveroso qualche definizione preliminare, tutto sommato intuitiva:

- Si denoterà con $\text{Per}_N(\sigma)$ l'insieme dei punti periodici di periodo N per σ cioè l'insieme di tutte le successioni $s = (s_0, s_1, \dots)$ tali che $s_{k+N} = s_k \forall k$
- $\text{Per}(\sigma) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \text{Per}_N(\sigma)$

Si ha allora la seguente proposizione (si veda [1] e [4]):

Proposizione 3.

- (i) $\text{Per}_N(\sigma)$ ha esattamente 2^N punti;
- (ii) $\text{Per}(\sigma)$ è denso in Σ_2 ;
- (iii) σ ammette un'orbita densa in Σ_2 ;

Dimostrazione. In (i) ci si chiede solamente quante stringhe di lunghezza N si possono creare avendo a disposizione due soli elementi: chiaramente 2^N .

Per la (ii) bisogna provare che dato un punto $t \in \Sigma_2$ esiste un punto $s \in \text{Per}(\sigma)$ arbitrariamente vicino ad esso: precisamente si mostrerà che dato $t = (t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots) \in \Sigma_2$ esiste una successione di elementi

$$s^{(n)} = (t_0, t_1, \dots, t_n, t_0, t_1, \dots, t_n, t_0, \dots)$$

appartenenti a $\text{Per}(\sigma)$ che converge a t . Vale infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(s^{(n)}, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k^{(n)} - t_k|}{2^k} \leq 2^{-n} = 0,$$

come voluto.

La (iii) è la più interessante: anche qui preso il solito $t \in \Sigma_2$ si deve trovare un punto dell'orbita di σ arbitrariamente vicino ad esso. L'idea è quella di considerare il seguente dato iniziale:

$$u = (01|00\ 01\ 10\ 11|000\ 001\ 010\ \dots|\dots),$$

dove si intende che le barre verticali separano tutte le possibili stringhe che si possono creare con n elementi da quelle che si possono creare con $n + 1$ elementi, mentre gli spazi separano due stringhe diverse costituite dallo stesso numero di elementi. Per costruzione esiste *da qualche parte in u* una sequenza i cui elementi sono uguali ai primi n elementi di t , esiste insomma in u una sequenza che approssima *bene quanto si vuole* t . Basta allora applicare l'operatore σ tante volte quante è necessario, ad esempio k volte, per far sì che il primo elemento di tale sequenza compaia in prima posizione, di modo che si abbia: $d(\sigma^k(u), t) \leq 2^{-n}$ e qui si conclude. \square

Tuttavia, almeno fin qui, i risultati ricavati per la dinamica simbolica sembrano essere in qualche modo confinati a sé stessi e slegati dalla dinamica data dall'iterazione di mappe dell'intervallo unidimensionali, come la mappa logistica f_r . Le cose però non stanno affatto così, come incomincia ad intravedersi dalla seguente definizione:

Definizione 9. Si dice *storia* del dato iniziale x la sequenza $S(x) = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ dove

$$s_k = \begin{cases} 0 & \text{se } f_r^k(x) \in I_0 \\ 1 & \text{se } f_r^k(x) \in I_1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Sembra quindi ragionevole supporre che il dato iniziale x , e le informazioni sulla dinamica data dall'iterazione di f_r , siano in qualche maniera contenuti e codificati nell'immagine di $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ pare insomma esserci una analogia tra la conversione binaria di un numero e la stringa ottenuta tramite $S(x)$. Chiaramente perché la cosa sia utile e dia informazioni risulta naturale sperare che la S sia quanto meno una iniezione: avere elementi codificati allo stesso modo genererebbe confusione; ci si aspetta inoltre che l'applicazione in questione mandi dati vicini in stringhe anch'esse vicine. In effetti le cose stanno proprio così ed anzi c'è un preciso legame tra la dinamica data dall'iterazione di f_r su Λ e quella data dall'iterazione di σ in Σ_2 e il ponte di collegamento tra le due è proprio S .

Vale infatti il seguente fondamentale Teorema (tratta da [1])

Teorema 2. Per $r > 2 + \sqrt{5}$, $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ è un omeomorfismo, che coniuga l'azione della dinamica data dall'iterazione di f_r su Λ con quella data dall'iterazione di σ su Σ_2 ; precisamente si ha:

$$S \circ f_r(x) = \sigma \circ S(x) \quad \forall x \in \Lambda. \quad (2.8)$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che S è iniettiva, suriettiva e quindi invertibile, continua con inversa anch'essa continua. Si prova anzitutto l'iniettività, che, come detto, è legittimo aspettarsi vista il significato che S assume. Si supponga per assurdo che esistano x, y con $x \neq y$ tali che $S(x) = S(y)$. Allora, per ogni n ,

$f_r^n(x)$ e $f_r^n(y)$ stanno dalla stessa parte di $\frac{1}{2}$, in particolare apparterranno entrambi ad I_0 o ad I_1 . Pertanto, ricordando ancora una volta il Teorema del valor medio di Lagrange, e la maggiorazione fatta su f_r' si avrà: $|f_r^n(x) - f_r^n(y)| \geq \lambda^n |x - y|$.

Ora esisterà sicuramente un n tale che $\lambda^n |x - y|$ sia maggiore di $\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{r}}}{2}$ che è la lunghezza di entrambi I_0 e I_1 ma allora $f_r^n(x)$ e $f_r^n(y)$ non possono stare entrambi o in I_0 o in I_1 il che prova l'assurdo e l'iniettività di S .

Quanto alla suriettività è necessario premettere alcune notazioni. Sia $J \subset [0, 1]$ un intervallo chiuso, allora si indicherà con $f^{-n}(J) = \{x \in [0, 1] : f^n(x) \in J\}$. Si noti poi che la preimmagine di un intervallo chiuso J contenuto in $[0, 1]$ è costituita da intervalli chiusi, uno contenuto in I_0 e l'altro contenuto in I_1 .

Sia allora $s = (s_0, s_1, \dots)$ si vuole trovare un $x \in \Lambda$ tale che $S(x) = s$. Si consideri allora

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in [0, 1] : x \in I_{s_0}, f(x) \in I_{s_1}, \dots, f^n(x) \in I_{s_n} \quad s_j = 0, 1\} \\ &= I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Si vuole provare che $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$, per $n \rightarrow \infty$, forma una successione di intervalli chiusi non vuoti in cui il successivo è sempre contenuto nel precedente.

Si noti anzitutto che

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}).$$

Per induzione possiamo assumere che $I_{s_1 \dots s_n}$ sia chiuso e non vuoto, ma grazie alla precedente osservazione $f^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ consiste in due intervalli chiusi, uno in I_0 l'altro in I_1 e quindi $I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$ è un singolo intervallo chiuso. Gli intervalli sono gli uni contenuti negli altri, infatti:

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} \cap f^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}.$$

Si può quindi concludere che

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n},$$

è non vuoto. Ma allora se $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ si ha che $x \in I_{s_0}$, $f(x) \in I_{s_1}$ e così via, pertanto $S(x) = s$ come voluto.

Si prova ora la continuità. Fissato ϵ si scelga n tale che $2^{-n} < \epsilon$. Sia inoltre $x \in \Lambda$ e $x \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Se δ è sufficientemente piccolo e $y \in \Lambda$ con $|y - x| < \delta$ allora $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$. Ma allora i primi n elementi delle due stringhe $S(x)$ e $S(y)$ risultano coincidenti per cui, ricordando la (2.5), $d(S(x), S(y)) \leq 2^{-n} < \epsilon$ quindi si ha la continuità. Come noto l'inversa di una funzione continua su un compatto è anch'essa continua pertanto S è omeomorfismo.

Venendo ora all'ultima affermazione fatta è chiaro che se il dato iniziale x si trova in I_i con $i = 0$ o 1 alla k -esima iterazione, allora il dato iniziale $f(x)$ si troverà in I_i alla $k - 1$ -esima iterazione, dunque la storia di $f(x)$ è la storia di x a cui è stata applicato uno shift che non è altro che la (2.8). \square

Grazie al precedente Teorema quindi anziché studiare ed affrontare i problemi che si presentano nella dinamica data dall'iterazione di f_r su Λ si può concentrare l'attenzione sulla dinamica data dall'iterazione di σ su Σ_2 e ottenere qui, in modo

decisamente più agevole, dei risultati che saranno validi anche per f_r e Λ . Ci si può insomma servire della *dinamica simbolica* per scardinare la dinamica a cui si è interessati. I concetti qui esposti non valgono chiaramente solamente per f_r e σ : due applicazioni $f : A \rightarrow A$ e $g : B \rightarrow B$ si dicono *topologicamente coniugate* se esiste un *omeomorfismo* $h : A \rightarrow B$ tale che $h \circ f = g \circ h$. L'idea insomma è che due applicazioni coniugate generino la stessa dinamica, e pertanto conviene spostarsi laddove le cose sono più facilmente risolvibili, e il problema diventa semmai trovare l'omeomorfismo topologico adatto⁶.

Per quanto detto quindi, ricordando la (2.8) vale anche (si veda [1]):

Proposizione 4. *Sia $f_r = rx(1 - x)$ con $r > 2 + \sqrt{5}$:*

- (i) $\text{Per}_N(f_r)$ ha esattamente 2^N punti;
- (ii) $\text{Per}(f_r)$ è denso in Λ ;
- (iii) f_r ammette un'orbita densa in Λ .

⁶In modo un po' pittorico si potrebbe dire che bisogna trovare le *giuste coordinate*

2.3.3 Mappa unidimensionale caotica

La mappa logistica presenta un altro comportamento estremamente importante, ossia la *dipendenza delicata dalle condizioni iniziali* che assieme a qualche altro ingrediente permetterà di dare una definizione precisa di *mappa unidimensionale caotica*. Una nozione da introdurre è quella di *applicazione topologicamente transitiva*:

Definizione 10. Una applicazione continua $f : I \rightarrow I$ si dice *topologicamente transitiva* se presi $U \supset I$ e $V \supset I$ risulta $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ per qualche k .

L'idea è quindi che preso un intorno, anche piccolo, il fascio di orbite uscente da esso visita prima o poi qualsiasi altro intorno: è chiaro allora che se una mappa ammette un'orbita densa essa è anche topologicamente transitiva. L'aspetto più interessante è però, come anticipato, il seguente:

Definizione 11. Un'applicazione $f : I \rightarrow I$ ha *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* quando esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in I$ e per ogni intorno N di x , esistono $y \in N$ e $n \geq 0$ tali che $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Si può aggiungere anche la seguente nozione, che implica la precedente:

Definizione 12. Un'applicazione $f : I \rightarrow I$ è *espansiva* se esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in I$, $x \neq y$, esiste e un $n \geq 0$ tale che $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Ovviamente la dinamica generata dalla mappa logistica è espansiva, basta infatti scegliere $\delta < \sqrt{1 - \frac{4}{r}}$ che è la lunghezza di A_0 , e ricordare l'iniettività di S : prima o poi due punti arbitrariamente vicini si troveranno da parti opposte rispetto ad A_0 . Si può ora dare una definizione di *mappa caotica unidimensionale* precisando però che quella presentata non è l'unica definizione possibile di mappa caotica, essa è nota in letteratura come *mappa caotica secondo Devaney*:

Definizione 13. Una mappa $f : I \rightarrow I$ si dice *caotica* se:

- (i) f ha dipendenza delicata dalle condizioni iniziali;
- (ii) f è topologicamente transitiva;
- (iii) l'insieme dei punti periodici di f è denso in I .

La mappa logistica per $r > 2 + \sqrt{5}$ è caotica per dati iniziali scelti in Λ , e si potrebbe dimostrare che la cosa è vera anche per $r > 4$. Qualche commento è però ora doveroso. Secondo questa definizione tre sono gli ingredienti fondamentali: *impredicibilità*, *indecomponibilità* e, nonostante tutto, una certa *regolarità*. Per quanto riguarda il primo non si intende solamente che dati iniziali vicini possono avere comportamenti asintotici drasticamente diversi ma anche che calcolare numericamente le traiettorie potrebbe essere privo di senso: inevitabili errori numerici potrebbero portare a calcolare una traiettoria marcatamente distinta da quella effettiva, per il dato iniziale assegnato.⁷ Il secondo aspetto sancisce la non esistenza di sottoinsiemi invarianti dai quali la dinamica non esce: in un certo senso non si può scomporre

⁷L'affidabilità del calcolo numerico è in effetti un argomento molto complicato e delicato che non può essere qui trattato.

la dinamica in qualcosa di più semplice, regolare ed agevole da trattare. L'ultimo elemento è quello che ha bisogno di meno commenti, si richiede infatti una certa regolarità. Sembrerebbe quindi che la prima condizione sia quella più significativa e più vicina all'idea intuitiva di caos: in realtà si può mostrare, si rimanda a [8], che se una mappa è transitivamente topologica e l'insieme dei suoi punti periodici è denso allora essa presenta anche dipendenza sensibile dai dati iniziali. Questa affermazione è senz'altro sorprendente non solo per i significati attribuiti ai vari ingredienti necessari per avere una dinamica caotica, ma anche perché mette in luce veramente a pieno la potenza della congiunzione topologica, vale infatti la seguente proposizione (tratta da [9]):

Proposizione 5. *Siano $f : A \rightarrow A$ e $g : B \rightarrow B$ due applicazioni topologicamente coniugate mediante $h : A \rightarrow B$ allora se f è caotica anche g lo è.*

Dimostrazione. Sia $U \subset B$ un aperto, si consideri $h^{-1}(U) \subset A$ che deve essere anch'esso aperto. Ora essendo f caotica esiste sicuramente un punto $x \in h^{-1}(U)$ periodico di periodo N ovvero $f^N(x) = x$; ma allora $g^N(h(x)) = h(f^N(x)) = h(x)$ quindi anche $h(x)$ è periodico per g e ciò prova che l'insieme dei punti periodici di g è denso. Siano ora $U, V \subset B$, come prima anche $h^{-1}(U)$ e $h^{-1}(V)$ sono due aperti contenuti in A . Essendo f caotica essa è in particolare topologicamente transitiva e allora preso $x \in h^{-1}(U)$ esiste un k tale che $f^k(x) \in h^{-1}(V)$ e quindi $g^k(h(x)) = h(f^k(x)) \in V$ e questo prova che anche g è topologicamente transitiva. Per quanto affermato in precedenza però le due proprietà dimostrate per g sono sufficienti a garantire la sensibilità rispetto ai dati iniziali e quindi il fatto che g sia caotica. \square

Si vuole ora studiare la mappa logistica per $r = 4$ e, come accennato, lo strumento della coniugazione topologica sarà fondamentale. Si introduce a tal proposito la *mappa a tenda*, $T(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, si veda la figura (2.9), definita come segue:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

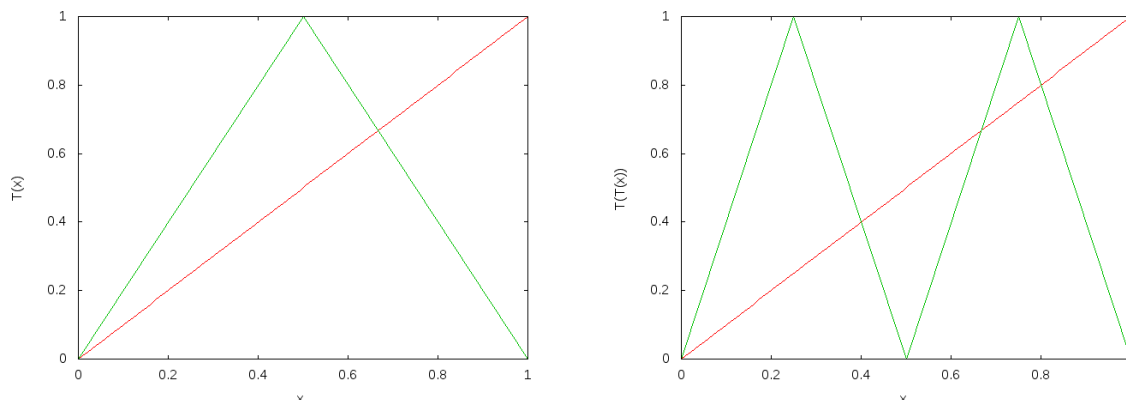


Figura 2.9: Mappa a tenda, a sinistra, e T^2 , a destra.

A questo punto non è difficile convincersi che la mappa (2.9) è caotica nel senso di Devaney; infatti la lunghezza di un intervallo $[a, b]$ è raddoppiata ad ogni iterazione di modo che, prima o poi, tutto l'intervallo $[0, 1]$ è coperto: la mappa è evidentemente topologicamente transitiva. Per mostrare che l'insieme dei punti periodici è denso è utile visualizzare le iterate della mappa a tenda. Si consideri un $x_0 \in (0, 1)$ e scelto $\epsilon > 0$ piccolo a piacere bisogna mostrare che $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ contiene un punto periodico. Sicuramente però esiste un n tale che $T^n(x)$ assume il valore massimo, 1, e quello minimo, 0, in $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ e quindi, essendo T^n continua, essa intersecherà la bisettrice $y = x$ in almeno un punto, sia esso \bar{x} , contenuto in $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Si avrà insomma $T^n(\bar{x}) = \bar{x}$ quindi \bar{x} è periodico, come voluto. Quanto detto è sufficiente per garantire la dipendenza sensibile dai dati iniziali e quindi il fatto che $T(x)$ è caotica. Per lo scopo che ci si era prefissati, ossia mostrare le caratteristiche di caoticità di $f_4(x) = 4x(1 - x)$, bisogna trovare un omeomorfismo che realizzi una congiunzione tra la mappa a tenda e f_4 . Una semplice verifica mostra che $h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$ è proprio quello che si cercava. Il fatto che $h(x)$ sia omeomorfismo è semplice, controllare che sia una congiunzione topologica, ossia che $h(T(x)) = f_4(h(x))$ segue dalle identità trigonometriche.

Infatti:

$$f_4(h(x)) = 4h(x)(1 - h(x)) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

D'altro canto, sia $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, allora:

$$h(T(x)) = \sin^2\left(\frac{\pi T(x)}{2}\right) = \sin^2(\pi x) = \left(2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Se invece $\frac{1}{2} < x \leq 1$ si ottiene:

$$h(T(x)) = \sin^2\left(\frac{\pi T(x)}{2}\right) = \sin^2(\pi(1 - x)) = \sin^2(\pi x) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

In virtù della Proposizione (5) allora anche $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è caotica. Vale la pena però aggiungere un ulteriore dettaglio: per $r > 4$ la corrispondente f_r risulta essere caotica solo per dati iniziali scelti nell'insieme cantoriano Λ , al contrario invece per $r = 4$ f_r risulta essere caotica su tutto $[0, 1]$.

2.3.4 Cenni alla teoria Ergodica

Si vorrebbe a questo punto cercare di estrarre delle altre informazioni sulla dinamica data dall'iterazione di $T(x)$ o di $f_4(x)$, come detto esse sono topologicamente coniugate e quindi una volta risolto il problema per una, nella fattispecie per $T(x)$, si ottengono le informazioni per l'altra tramite l'omeomorfismo $h(x)$. Una questione interessante può essere cercare di capire con che frequenza nel corso della dinamica si visita un certo intervallo, e come si distribuiscono i vari punti dell'orbita lungo $[0, 1]$. Per rispondere a questi interrogativi è necessario introdurre alcune nozioni della *teoria Ergodica*, inquadrandole in un contesto più generale di quello a cui si è fatto riferimento in precedenza, ossia uno spazio delle fasi M e un gruppo di trasformazioni ad un parametro Φ^t , con $t \in \mathbb{R}$ oppure $t \in \mathbb{Z}$ in luogo dell'intervallo $[0, 1]$ e delle iterazioni di una mappa.

Anzitutto si definisce *misura invariante* la misura μ che soddisfa la seguente relazione:

$$\mu(\Phi^{-t}(A)) = \mu(A) \quad A \text{ misurabile.} \quad (2.10)$$

Nel seguito, parlando di misura, si intenderà che essa soddisfa la (2.10). La terna (M, μ, Φ) costituisce un *sistema dinamico classico*. Si introduce poi la seguente definizione:

Definizione 14. Per ogni insieme A misurabile si definisce, se esiste, la *frequenza di visita* dell'insieme A relativa al dato iniziale x :

$$\tau_A(x, t) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \chi_A(\Phi^s(x)), \quad (2.11)$$

ove χ_A denota la funzione caratteristica di A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Un punto particolarmente importante è che non è scontato che la (2.11) esista, in effetti solo grazie al teorema di Birkhoff–Kinchin (si veda [10]) si può affermare che essa è definita *quasi ovunque* in M .

Si può mostrare che esistono quattro proprietà equivalenti che definiscono un *sistema ergodico*, ci si limiterà, però, a riportarne qui solamente una, (per le altre si rimanda a [10]) quella che sarà utile nel seguito. Un sistema si definisce ergodico se per ogni $A \subset M$ la frequenza di visita (2.11) è uguale alla misura di A , ossia:

$$\tau_A(x) = \mu(A) \quad \text{quasi ovunque in } A.$$

Assodati questi concetti si può proseguire la trattazione della mappa a tenda. Con evidenza la misura invariante è, in questo caso, l'usuale misura di Lebesgue e si può dimostrare che il sistema dato dalle iterazioni della (2.9) è ergodico. Si può affermare allora che la probabilità che nel corso della dinamica data dalle iterazioni di $T(x)$ si cada in un intervallo A è pari alla misura di Lebesgue di A stesso. Ricordando però la coniugazione topologica tra la mappa a tenda e la mappa logistica per $r = 4$, la probabilità che x appartenga ad A è uguale alla probabilità che $y = h(x)$ appartenga ad $h(A)$ dove, lo si ricorda, $y = h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$ e ovviamente $x = h^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{y})$. Ma allora, dall'espressione del cambio di variabile negli integrali, segue che:

$$\int_A dx = \int_{h(A)} \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} dy. \quad (2.12)$$

Quindi, iterando $f_4(y)$, la probabilità che si cada in un intervallo B è:

$$\int_B \rho(y) dy = \int_B \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} dy. \quad (2.13)$$

Grazie al calcolatore, dopo aver suddiviso l'intervallo $[0, 1]$ in un numero ragionevole di sotto-intervalli della stessa lunghezza, si può, iterando l'espressione $y_{i+1} = 4y_i(1 - y_i)$, ricostruire la frequenza di visita di ciascun sotto-intervallo e visualizzare la

situazione nel suo complesso tramite un istogramma opportunamente normalizzato. La densità di probabilità $\rho(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}$ si adatta all'istogramma, come deve essere. L'analisi condotta evidenzia che l'orbita è densa nell'intervallo $[0, 1]$ ma nel corso della dinamica è più probabile trovare i punti dell'orbita nei pressi degli estremi dell'intervallo rispetto alla zona centrale.

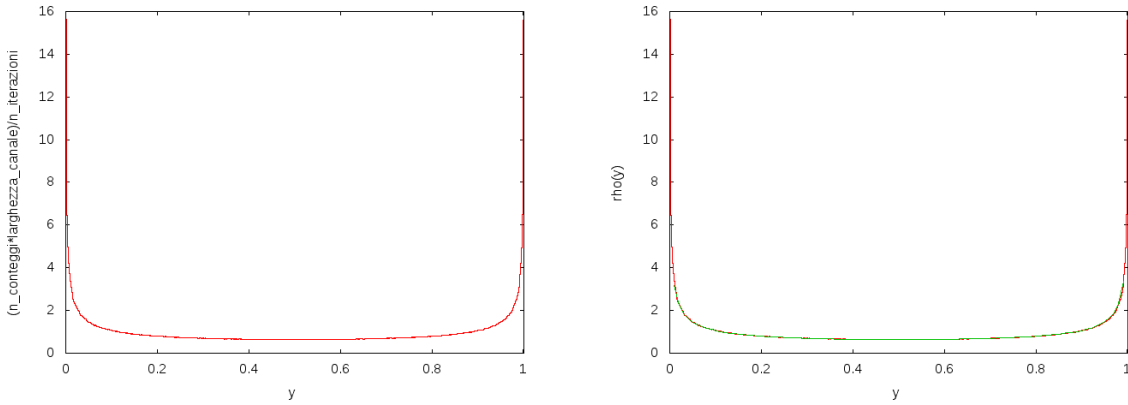


Figura 2.10: Istogramma normalizzato (sinistra) e la densità di probabilità $\rho = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ sovrapposta ad esso(destra).

Ripetendo l'esperimento numerico per valori di r di poco inferiori a 4, precisamente $r = 3.95$ e $r = 3.98$ si ottengono risultati interessanti, con istogrammi dal profilo non banale.

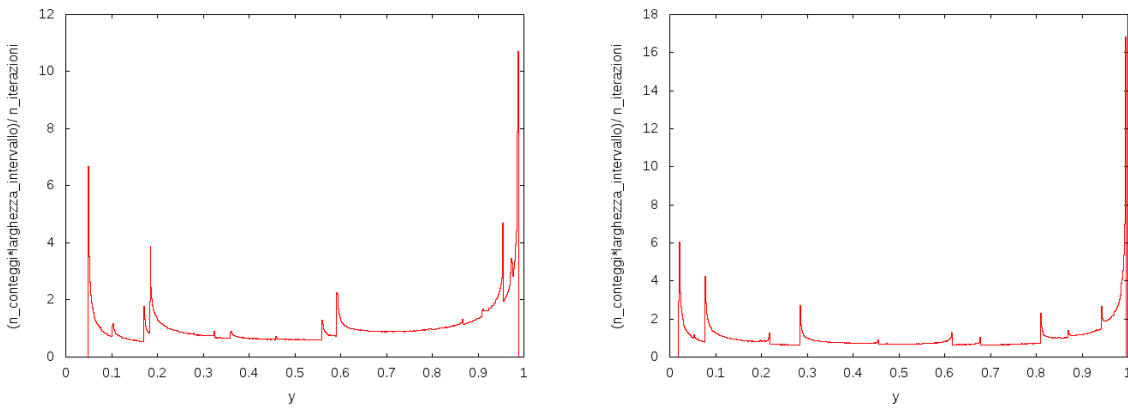


Figura 2.11: Istogramma realizzato per $r = 3.95$ (sinistra) e $r = 3.98$ (destra).

Capitolo 3

Riscontri sperimentali

In questa parte conclusiva si vuole mostrare come alcuni dei risultati ricavati per via matematica in precedenza siano connessi a problemi fisici e quindi riscontrabili sperimentalmente. I campi da cui possono essere tratti i vari esempi sono i più disparati dalla fluidodinamica alle reazioni chimiche organiche e inorganiche fino all'elettronica: si è scelto qui un esempio classico, il problema di Benard; si cercherà di fornire una descrizione molto sintetica del fenomeno in questione rimandando, per una trattazione più dettagliata, ad altri lavori. Più precisamente quello che si vuole mettere in evidenza è che almeno le prime biforcazioni del processo descritto (2.1.2) sono effettivamente osservabili sperimentalmente e, a partire dai dati raccolti, in certi casi è possibile un calcolo della *costante δ di Feigenbaum*, si riveda la (2.2), che risulta in accordo ragionevole con la previsione teorica.

3.1 Il problema di Benard

Quello che si propone di studiare in questo caso è il comportamento di un fluido, con coefficiente di dilatazione termica positivo, racchiuso in un recipiente la cui la parete inferiore si trova alla temperatura $T_0 + \Delta T$ mentre quella superiore è mantenuta alla temperatura T_0 . Il fluido riscaldato, nei pressi della parete inferiore, tenderebbe a risalire mentre quello che occupa lo spazio a ridosso della parete superiore tenderebbe a scendere; a questo si oppone però la viscosità del fluido stesso: se ΔT non è sufficientemente elevato si osserva solamente un gradiente uniforme di temperatura tra la parte inferiore e quella superiore. Incrementando ΔT però compaiono delle *celle convettive*, si può affermare insomma che la dinamica cambia al variare di ΔT o, meglio, al variare di un parametro adimensionale proporzionale a ΔT : il *numero di Rayleigh* definito come $R = \frac{g\beta}{\nu\alpha}\Delta TL^3$ con g accelerazione di gravità, β coefficiente di dilatazione termica, ν viscosità α coefficiente di diffusività termica e L l'altezza del contenitore. In questo contesto insomma R ha la stessa funzione che r aveva per la mappa logistica: in quel caso ciò che interessava era il numero di individui della popolazione x_n , si lavorava a tempo discreto, ora invece la grandezza fisica d'interesse è la temperatura $T(t)$, monitorata ad una posizione fissata, e si lavora a tempo continuo. È quindi per $T(t)$ che il periodo raddoppia, quadruplica, \dots , ossia diventa 2^n volte quello di partenza. Corrispondentemente se, come si usa fare, si preferisce riferirsi al dominio frequenze, e per farlo basta appli-

care la trasformata di Fourier, allora detta f_0 la frequenza fondamentale si troverà la sequenza $f_0, \frac{f_0}{2}, \frac{f_0}{4}, \dots$. Sono di seguito riportati i risultati per un esperimento condotto con il mercurio, si veda [5] per maggiori dettagli, anche se risultati simili sono stati ottenuti con acqua ed elio. È necessaria solo qualche indicazione: con R^c si indica il valore del numero di Rayleigh per il quale da un gradiente di temperatura uniforme si passa a moti convettivi, nella colonna di destra sono presentati i valori del parametro $\frac{R}{R^c}$ per il quale avviene una biforcazione¹.

frequenza	$\frac{R}{R^c}$
$\frac{f_0}{4}$	3,485
$\frac{f_0}{8}$	3,618
$\frac{f_0}{16}$	3,648
$\delta \pm \sigma_\delta$	
4,4 ± 0,1	

La compatibilità con il valore teorico non è ottima, tuttavia si ritiene che, riuscendo ad osservare anche le biforcazioni successive, si ottenga una stima ancora migliore. Vale la pena però sottolineare che altri lavori hanno condotto a stime compatibili con la (2.2), anche se in questi casi l'incertezza associata alla misura, e quindi l'errore relativo, è maggiore.

Da un punto di vista matematico la questione si affronta ricorrendo alla *Meccanica dei Continui*; infatti a ben vedere si ha a che fare con un numero infinito di gradi di libertà, inoltre compaiono equazioni alle derivate parziali, come la ben nota *equazione di Navier-Stokes*: la situazione è insomma molto complicata. I problemi però possono essere aggirati con l'introduzione di uno sviluppo in una opportuna base che poi viene troncato: più precisamente considerando uno sviluppo in serie di Fourier limitato ad un numero *ragionevole* di termini, ne bastano 3 o 5 per ottenere approssimazioni soddisfacenti e risultati interessanti, si riduce drasticamente il numero di gradi di libertà. Procedendo in questa direzione si ottiene il sistema di equazioni detto *di Lorenz*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \end{cases} \quad (3.1)$$

Anche qui qualche breve spiegazione è opportuna, seguendo le parole dello stesso Lorenz: "x è proporzionale all'intensità del moto convettivo mentre y è proporzionale alla differenza di temperatura tra la corrente ascendente e quella discendente, segni concordi in x e y indicano che il fluido caldo sta salendo e quello freddo scendendo", si usa fissare $\sigma = 10$ e $b = \frac{8}{3}$ mentre $r = \frac{R}{R^c}$ è il parametro variabile. Con qualche semplice manipolazione algebrica, tra cui l'introduzione di $\tilde{R} = b(\sigma + r)$, il sistema (3.1) si presta ad un'indagine numerica: quello che si ricerca è il periodo

¹Ovviamente ai fini del calcolo della δ considerare $\frac{R}{R^c}$ anziché R è indifferente.

delle orbite periodiche al variare di \tilde{R}^2 , qui si rimanda a [6], i risultati ottenuti sono riportati nel seguito:

\tilde{R}	periodo T
293,279	1,099559
292,3427	2,203567
292,12564	4,409210
292,078235	8,819327
292,068086	17,639042

Anche in questo caso, sempre tramite la (2.2) sono possibili varie stima della δ che vanno accumulandosi al valore teorico previsto:

δ_i	valore
δ_1	4,315
δ_2	4,578
δ_3	4,671

²In realtà il sistema di equazioni descrive bene il sistema fisico solo per $R \ll 300$, lo studio numerico è condotto per valori più alti del parametro, in quanto l'attenzione si focalizza su altri aspetti.

Bibliografia

- [1] Devaney R., (2003), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, Westview Press, Boulder.
- [2] Peitgen H.O., Jürgens H., Saupe D., (1992), *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York.
- [3] Robinson C., (1995), *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC press, Boca Ranton, Ann Arbor, London, Tokyo.
- [4] Dagli Esposti M., Graffi S., (2003), *Fisica matematica discreta*, Springer-Verlag Italia, Milano.
- [5] Libchaber A., Laroche C., Fauve S., (1982), *Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement* Le Journal de physique, Tome 43 No. 7 .
- [6] Franceschini V., (1980), *A Feigenbaum Sequence of Bifurcations in the Lorenz Model*, Journal of Statistical Physics, Vol.22 No. 3.
- [7] Katok A., Hasselblatt B., (1995), *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P., (1992), *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4.
- [9] Giorgilli A., *Dispense per il corso di Metodi e Modelli Matematici per le Applicazioni*, Università degli studi di Milano.
- [10] Benettin G., *Introduzione ai sistemi dinamici, appunti per il corso di Fisica Matematica*, Università degli studi di Padova.